Studentereksamen
Matematik

Martin Sparre & Peter Holthe Hansen
Frederiksborg Gymnasium og HF

Juni 2006

Matematiknoter

Formål:	Studentereksamen 2006
Udarbejdet af:	Martin Sparre & Peter Holthe Hansen
Klasse:	3.u 05/06
Gymnasium:	Frederiksborg Gymnasium og HF
Fag:	Matematik

Matematiknoter:

Studentereksamen 2006

Indhold

1 Andengradsligningen

En andengradsligning er en ligning indeholdende et andenordenspolynomium (andengradspolynomium) af én variabel x.

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.1}$$

hvor $a \neq 0$. Eftersom der er tale om et *andengrads*polynomium, siger Algebraens fundamentalsætning[1], at der til ovenstående ligning er *to* løsninger. Disse løsninger kan være reelle såvel som komplekse.

Rødderne x kan findes ved „completing the square“,

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Løser man for x, fås

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

hvilket er den kendte løsningsformel for andengradsligninger.

En anden form af denne løsningsformel fås ved at dividere (1.1) igennem med x^2:

$$\begin{aligned}
a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} &= 0 \\
c\left(\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx}\right) + a &= 0 \\
c\left(\frac{1}{x} + \frac{b}{2c}\right)^2 &= c\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - a = \frac{b^2}{4c} - \frac{4ac}{4c} = \frac{b^2 - 4ac}{4c}.
\end{aligned}$$

Deraf fås,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} + \frac{b}{2c} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \\
\frac{1}{x} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \\
x &= \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}
\end{aligned}$$

[1] Se **3 Algebraens Fundamentalsætning**

Denne form er god, hvis $b^2 \gg 4ac$, hvor $\gg$ betyder „meget større end“, hvor den „normale“ form af løsningsformlen for andengradsligninger kan give upræcise nummeriske resultater for en af rødderne. Dette kan løses ved at definere

$$q \equiv -\frac{1}{2}\left(b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

så b og udtrykket under rodtegnet altid har samme fortegn. Hvis $b > 0$, så har vi

$$q = -\frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

og

$$\begin{aligned}\frac{1}{q} &= \frac{-2}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{-2\left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{b^2 - (b^2 - 4ac)} \\ &= \frac{-2\left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{4ac} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ac},\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}x_1 &\equiv \frac{q}{a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 &\equiv \frac{c}{q} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

Analogt, hvis $b < 0$, så har vi

$$q = -\frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right) = \frac{1}{2}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

og

$$\begin{aligned}\frac{1}{q} &= \frac{2}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{2\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{-b^2 + (b^2 - 4ac)} \\ &= \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-2ac} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ac},\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}x_1 &\equiv \frac{q}{a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 &\equiv \frac{c}{q} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

Derfor er rødderne altid givet ved $x_1 = q/a$ og $x_2 = c/q$.

Overvej nu ligningen på formen

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

med rødderne z_1 og z_2. Disse løsninger opfylder Vieta's formler

$$z_1 + z_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$
$$z_1z_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

2 Taylorrækker

En Taylorrække er en rækkeudvikling af en funktion om et punkt. En etdimensionel Taylorrække er en udvikling af en reel funktion $f(x)$ om et punkt $x = a$ og er givet ved:

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \\
\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots. \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}
$$

Hvis $a = 0$, er udviklingen kendt som en Maclaurinrække.

Taylorrækker af nogle almindelige funktioner:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-x)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1-x)^3} + \ldots \\
\cos x &= \cos a - \sin a(x-a) - \frac{1}{2}\cos a(x-a)^2 + \frac{1}{6}\sin a(x-a)^3 + \ldots \\
e^x &= e^a \left[1 + (x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{6}(x-a)^3 + \ldots \right]
\end{aligned}
$$

3 Algebraens fundamentalsætning

Enhver ligning af formen $P(x) = 0$, hvor $P(x)$ er et polynomium med komplekse koefficienter og af grad ≥ 1, har mindst én kompleks rod. Denne sætning blev bevist af Gauss. Den er ækvivalent med udsagnet om, at et polynomium $P(z)$ af grad n har n værdier z_i (nogle af dem måske af algebraisk multiplicitet > 1) for hvilke $P(z_i) = 0$. Sådanne værdier kaldes rødder i det givne polynomium. Et eksempel på et polynomium med en enkelt rod af algebraisk multiplicitet > 1 er $z^2 - 2z + 1 = (z-1)(z-1)$, der har $z = 1$ som rod af algebraisk multiplicitet 2. Et andet eksempel er $z^3 = (z-0)(z-0)(z-0)$, der har $z = 0$ som rod af algebraisk multiplicitet 3.

Et bevis herfor føres ikke i denne notesamling, da et sådant er alt for stort, men kort kan den mest kendte fremgangsmåde til at bevise sætningen bringes. Først udvides differentialregningen til komplekse funktioner, og man viser, at et komplekst polynomium er en differentiabel funktion. Lad f være et polynomium, som ikke er konstant. Antag, at f ingen rødder har, altså at $f(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathbb{C}$. Da har vi en veldefineret kompleks funktion $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Man kan vise, at g er en begrænset funktion - det vil sige, at $|g(x)|$ er begrænet - og dette betyder, at g er konstant (dette kendes også som Liouvilles Sætning). Heraf følger, at også f er konstant, og det er noget vrøvl!

Bemærk, at algebraens fundamentalsætning kun udtaler sig om *eksistensen* af rødderne. Den udtaler sig *ikke* om, hvordan man finder dem! I tilfældet, hvor $f(x) = ax^2 + bx + c$ er et andengradspolynomium, kan man faktiskbruge den velkendte formel

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

for rødderne. Bemærk, at denne nu altid giver mening, idet vi nu godt kan tage kvadratroden af et negativt tal.

Man kan faktisk også nedfælde løsningsformler for tredjegrads- og fjerdegradsligninger, men disse formler er meget komplicerede. Mere nedslående er det, at det faktisk er bevist, at man ikke kan skrive løsningformler ned for n-tegradsligninger, når $n = 5$. Matematikken, der skal bruges til at vise dette, er meget langhåret, så det kommer vi ikke ind på i denne omgang.

4 Den komplekse eksponentialfunktion

Vi vil nu betragte eksponentialfunktionen, som er givet ved,

$$f(x) = e^{kx}, \tag{4.1}$$

hvor k normalt er en reel konstant og $x \in \mathbb{R}$. Taylorrækken for e^{kx} er givet ved:

$$e^{kx} = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^n}{n!} \tag{4.2}$$

Desuden husker vi på taylorrækkerne for $\cos x$ og $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots \tag{4.3}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots \tag{4.4}$$

Inden denne funktion betragtes yderligere, indføres den imaginære enhed, i, som faslægges ved

$$\boxed{i^2 = -1} \tag{4.5}$$

Nogle værdier for i^n opskrives for nogle heltallige værdier af n:

$$i^0 = 1 \tag{4.6}$$

$$i = i \tag{4.7}$$

$$i^2 = -1 \tag{4.8}$$

$$i^3 = -i \tag{4.9}$$

$$i^4 = 1 \tag{4.10}$$

$$i^5 = i \tag{4.11}$$

$$i^6 = -1 \tag{4.12}$$

$$i^7 = -i \tag{4.13}$$

$$i^8 = 1 \tag{4.14}$$

Herudfra laves en rækkeudvikling af e^{ix}:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^7x^7}{7!} + \frac{i^8x^8}{8!} + \ldots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned} \tag{4.15}$$

Endvidere må der gælde, at

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{4.16}$$

thi $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Vi har nu de to sammenhænge,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{4.17}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{4.18}$$

Ved at sætte $\cos x = \cos x$ i disse fås følgende:

$$e^{ix} - i \sin x = e^{-ix} + i \sin x \tag{4.19}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{4.20}$$

og tilsvarende fås for $\cos x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{4.21}$$

Dette er definitionerne af sinus og cosinus.

Vis nu hvordan de hyperbolske funktioner defineres. Tegn desuden $f(x) = e^{ix}$ og vis at $\Re(e^{ix}) = \cos x$ og $\Im(e^{ix}) = \sin x$. – Det er netop enhedscirklen i forklædning!

5 Differentialregning

5.1 Grundlæggende definitioner

Definition 5.1 (Kontinuitet)**.** *En funktion, $f(x)$, siges at være kontinuert i et interval $\mathcal{I}$, såfremt*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{5.1}$$

for alle $x \in \mathcal{I}$.

Definition 5.2 (Differentiabilitet og differentialkvotient)**.** *En funktion, $f(x)$, er differentiabel i et interval $\mathcal{I}$ såfremt grænseværdien,*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{5.2}$$

eksisterer for alle $x_0 \in \mathcal{I}$.

Såfremt grænseværdien eksisterer kaldes denne differentialkvotienten.

Bemærkning 1 (Notation i forbindelse med differentialkvotient)**.** *Differentialkvotienten kan eksempelvis skrives som*

$$f'(x), \quad \frac{\boldsymbol{d}f(x)}{\boldsymbol{d}x}, \quad D(f) \tag{5.3}$$

Hvis man henviser til til differentialkvotienten i en punkt $(x_0, f(x_0))$, kan dette skrives som

$$f'(x_0) \quad , \quad \left.\frac{\boldsymbol{d}f(x)}{\boldsymbol{d}x}\right|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{\boldsymbol{d}f}{\boldsymbol{d}x}\right|_{x=x_0} \quad , \quad D(f)(x_0) \tag{5.4}$$

Sætning 1. *En funktion, der er differentiabel i x_0, er kontinuert i x_0.*

Bevis. Vi betragter en differentiabel funktion, $f(x)$, defineret i et interval omkring x_0. $f(x)$ må opfylde følgende:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) \text{ for } x \to x_0 \tag{5.5}$$

En kontinuert funktion opfylder følgende:

$$f(x) - f(x_0) \to 0 \text{ for } x \to x_0. \tag{5.6}$$

Dette er en følge af 5.1.

For $x \neq x_0$ gælder

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \tag{5.7}$$

Hvis vi lader x gå mod x_0 får vi:

$$f(x) - f(x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 \text{ for } x \to x_0 \tag{5.8}$$

Det følger heraf, at $f(x) - f(x_0) \to 0$ for $x \to x_0$. □

5.2 Differentialkvotienter

Sætning 2 (Differentiation af x^2)**.** *Funktionen, $f(x) = x^2$, er differentiabel og $f'(x_0) = 2x_0$.*

Bevis. Differenskvotienten opskrives:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \tag{5.9}$$

For $x \to x_0$ er $f'(x_0) = 2x_0$. □

Alternativt Bevis. Vi skal finde $\frac{\boldsymbol{d}f}{\boldsymbol{d}x}$. Dette gør vi ved at finde sekanthældningen for en sekant gennem $(x_0, f(x_0))$ og $(x_0 + \boldsymbol{d}x, f(x_0 + \boldsymbol{d}x))$, hvor $\boldsymbol{d}x$ er en infinitesimal størrelse:

$$\frac{\boldsymbol{d}f}{\boldsymbol{d}x} = \frac{(x + \boldsymbol{d}x)^2 - x^2}{(x + \boldsymbol{d}x) - x} \tag{5.10}$$

$$= \frac{x^2 + (\boldsymbol{d}x)^2 + 2x\boldsymbol{d}x - x^2}{\boldsymbol{d}x} \tag{5.11}$$

$$= \boldsymbol{d}x + 2x \tag{5.12}$$

$$= 2x \tag{5.13}$$

Til sidst har vi "smidt"den infinitesimale størrelse $\boldsymbol{d}x$ væk. Dette kan vi gøre, efterdi denne er infinitesimal. □

Vi har her bevist den samme sætning på to forskellige måder. I det første bevis fandt vi grænseværdien for differenskvotienten for $x \to x_0$ og i det andet bevis, opskrev vi sekanthældningen for en sekant gennem $(x_0, f(x_0))$ og $(x_0 + \boldsymbol{d}x, f(x_0 + \boldsymbol{d}x))$.

Fordelen ved den første bevistype er helt klart, at vi slipper for *at skulle smide noget væk*, som vi gjorde det i (5.13). Der skal således ikke herske nogen tvivl om, at det første bevis matematisk set er mere pænt og mere korrekt end det andet bevis.

Men derimod giver det andet bevis en langt bedre indsigt i, hvordan man kan regne med infitesimale størrelser.

Det skal også bemærkes, at den oprindelige differentialregning, som blev udviklet af Newton og Leibnitz, byggede på infinitesimaler og fluktioner og ikke på grænseværdier.

Sætning 3 (Differentiation af et produkt)**.** *Hvis funktionerne, f og g, er differentiable i x_0 gælder:*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g(x_0) \cdot g'(x_0) \tag{5.14}$$

Bevis. Først opskrives differenskvotienten for $(f \cdot g)'(x_0)$, idet $h(x) \equiv (f \cdot g)(x)$:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f(x) \cdot g(x)) - (f(x_0) \cdot g(x_0))}{x - x_0} \tag{5.15}$$

$$= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \tag{5.16}$$

$$= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \tag{5.17}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \tag{5.18}$$

I (5.16) udnyttede vi, at $f(x) = (f(x) - f(x_0)) + f(x_0)$.

Hvis vi lader x gå mod x_0 får vi:

$$(f \cdot g)'(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{1} \cdot \underbrace{g(x_0)}_{2} + f(x_0) \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{3} \tag{5.19}$$

Her er begrundelser for de givne grænseværdier:

1. Da f er differentiabel går differenskvotienten mod differentialkvotienten.

2. Da g er differentiabel, er denne også kontinuert, således at $g(x) \to g(x_0)$ for $x \to x_0$.

3. Da g er differentiabel går differenskvotienten mod differentialkvotienten.

Hermed er det ønskede bevist. □

Sætning 4 (Differentiation af en brøk)**.** *Hvis funktionerne, f og g, er differentiable i x_0 gælder:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \tag{5.20}$$

Bevis. Beviset udelades, da der ikke er plads i marginen. □

Sætning 5 (Differentiation af en sammensat funktion)**.** *Lad g være en funktion, der er differentiabel i x_0, og lad f være en funktion, der er differentiabel i $g(x_0)$. Den sammensatte funktion, $f \circ g$, er da differentiabel i x_0, og der gælder:*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \tag{5.21}$$

Bevis. Vi indfører, at $h \equiv f \circ g$. Differenskvotienten for h opskrives:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \tag{5.22}$$

Vi forudsætter, at $g(x) \neq g(x_0)$. Vi kan nu foretage følgende omskrivning:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \tag{5.23}$$

$$= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \tag{5.24}$$

For $x \to x_0$ fås

$$(f \circ g)'(x_0) = \underbrace{f'(g(x_0))}_{1} \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{2} \tag{5.25}$$

Her er begrundelser for de givne grænseværdier:

1. Da f er differentiabel i $g(x_0)$ vil $\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \to f'(g(x_0))$ for $x \to x_0$.

2. Da g er differentiabel i x_0 er denne også kontinuert x_0 således, at $g(x) \to g(x_0)$ for $x \to x_0$.

Hermed er beviset slut (Under forudsætningen, at $g(x) \neq g(x_0)$ i et interval omkring x_0) □

6 Integration

6.1 Beviser

Sætning 6 (Partiel integration)**.** *Lad f være kontinuert og g være differentiabel med kontinuert afledet på et interval, $\mathcal{I}$, og lad $a, b \in \mathcal{I}$. Lad endvidere F være en stamfunktion til f og g' være den afledte af g. Så gælder*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \boldsymbol{d}x = [F(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x) \boldsymbol{d}x \tag{6.1}$$

Bevis. Via produktreglen for differentiation fås:

$$(F(x) \cdot g(x))' = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x) \tag{6.2}$$

Produktreglen kunne bruges, efterdi F og g er differentiable i $\mathcal{I}$. At F er differentiabel følger direkte af, at F er stamfunktion til f og, at g er differentiabel følger af forudsætningerne i sætningen.

Af (6.2) følger direkte:

$$[F(x) \cdot g(x)]_a^b = \int_a^b F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x)\, \boldsymbol{d}x \qquad \Longleftrightarrow \tag{6.3}$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, \boldsymbol{d}x = [F(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x)\, \boldsymbol{d}x \tag{6.4}$$

Omskrivningen fra (6.2) til (6.3) kunne lade sig gøre, da F, g, $F' = f$ og g' var kontinuerte (Husk, at hvis en funktion er differentiabel er det en implikation, at funktionen også er kontinuert). □

Sætning 7 (Integration ved substitution)**.** *Lad g være differentiabel med kontinuert afledet i et interval $\mathcal{I}$ og lad f være kontinuert i værdimængden for g. Når $a, b \in \mathcal{I}$ gælder:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \boldsymbol{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \boldsymbol{d}t \tag{6.5}$$

Bevis. Ifølge reglen for differentiation af en sammensat funktion gælder:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) \tag{6.6}$$

Her er $F' = f$. Idet F og g er differentiable er (6.6) et sandt udtryk.

Af (6.6) følger umiddelbart:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \boldsymbol{d}x = [F(g(x))]_a^b \tag{6.7}$$

$$= [F(t)]_{g(a)}^{g(b)} \tag{6.8}$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \boldsymbol{d}t \tag{6.9}$$

□

7 Gammafunktionen

Gammafunktionen defineres for positive tal ved

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \boldsymbol{d}t, \qquad x > 0 \tag{7.1}$$

Metoden for partiel integration ser således ud:

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) \boldsymbol{d}t = [F(t) \cdot g(t)]_a^b - \int_a^b F(t) \cdot g'(t) \boldsymbol{d}t \tag{7.2}$$

For $\Gamma(x)$ sætter vi

$$f(t) = e^{-t} \text{ og } g(t) = t^{x-1}, \tag{7.3}$$

hvilket medfører, at

$$F(t) = -e^{-t} \text{ og } g'(t) = (x-1)t^{x-2}. \tag{7.4}$$

Dvs.,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} \boldsymbol{d}t \tag{7.5}$$

$$= \left[-e^{-t} \cdot t^{x-1}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t} \cdot (x-1)t^{x-2} \boldsymbol{d}t \tag{7.6}$$

$$= \left[-e^{-t} \cdot t^{x-1}\right]_0^\infty + (x-1) \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-2} \boldsymbol{d}t \tag{7.7}$$

Det ses, at $\left[-e^{-t} \cdot t^{x-1}\right]_0^\infty = 0$ for $x > 0$. Dette giver

$$\Gamma(x) = (x-1) \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-2} \boldsymbol{d}t\ . \tag{7.8}$$

Ved at addere x med 1 fås:

$$\Gamma(x+1) = x \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} \boldsymbol{d}t \tag{7.9}$$

$$= x\Gamma(x). \tag{7.10}$$

Vi har altså vist sammenhængen,

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)} \tag{7.11}$$

For gammafunktionen gælder således for heltal,

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \tag{7.12}$$

$$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \tag{7.13}$$

$$= (n-1)(n-2)\ldots 1 \tag{7.14}$$

$$= (n-1)! \tag{7.15}$$

Der gælder således, at

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \tag{7.16}$$

hvor $n \in \mathbb{Z}$.

Det kan således for eksempel vises, at $0! = 1$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} \boldsymbol{d}t \tag{7.17}$$

$$= \left[-e^{-t}\right]_0^\infty \tag{7.18}$$

$$= 1 \tag{7.19}$$

Dette er jo også klart, thi $n!$ er antallet permutationer af en n-mængde. Og en mængde med 0 elementer er jo netop den tomme mængde.

8 Numerisk Integration

I det følgende vises det, hvorledes man kan bestemme værdier af bestemte integraler. Det forudsættes, at integranten er kontinuert på et interval, $\mathcal{I}$, og at den øvre grænse samt den nedre grænse for det bestemte integrale, er et element i $\mathcal{I}$.

Først laves en figur:

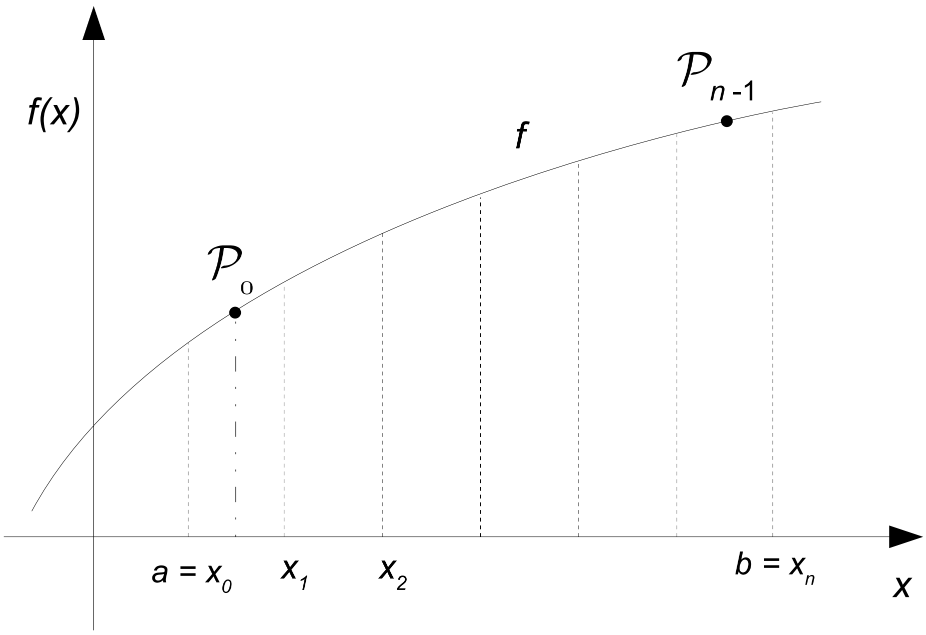

Fig. 1: På denne figur ses en række søjler under f. Punktet, P_0, angiver funktionsværdien midt i den første søjle.

På figuren er indtegnet en funktion, f, der er kontinuert på et interval, $\mathcal{I}$. Integralet, som vi vil finde, har den nedre grænse, a, den øvre grænse, b, og der gælder, at $a, b \in \mathcal{I}$.

Såfremt $b \geq a$ og f er større end eller lig nul i intervallet $[a; b]$, er det bestemte integrale lig med arealet af punktmængden, $\mathcal{M}$, der fastlægges ved:

$$\mathcal{M} = \{(x, y) | a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\} \tag{8.1}$$

For at bestemme en estimeret værdi for det bestemte integrale, kan man således (i dette tilfælde) bestemme en approksimeret værdi for arealet af punktmængden, $\mathcal{M}$. Af figuren er indtegnet nogle søjler, der har bredden, Δx. Antallet af søjler betegnes n. Ved at betragte figuren fås, at

$$n = \frac{|b - a|}{\Delta x} \tag{8.2}$$

En estimeret værdi for arealet af den første søjle er følgende:

$$f\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x \tag{8.3}$$

Arealet af den anden søjle kan vil tilsvarende approksimeres til

$$f\left(a + \frac{\Delta x}{2} + \Delta x\right)\Delta x \tag{8.4}$$

Ved at gentage denne proces n gange fås, at arealet kan approksimeres til

$$\text{Areal} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x)\Delta x \tag{8.5}$$

hvor $x_i = a + i \cdot \Delta x$.

Hvis vi lader Δx gå mod 0, således at $\Delta x = \boldsymbol{d}x$, fås det bestemte integrale på sin sædvanlige form:

$$\int_a^b f(x)\ \boldsymbol{d}x \tag{8.6}$$

I dette bevis er det forudsat, at $b \geq a$ og at $f(x) \geq 0$ i intervallet $[a; b]$. Dette er dog ikke generelle betingelser og den angivede formel kan således, altid bruges såfremt f er kontinuert i det interval, der integreres over.

Der gælder således følgende:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ \boldsymbol{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{\Delta x}{2})\Delta x} \tag{8.7}$$

hvor $n = \dfrac{|b-a|}{\Delta x}$.

9 Biologi-differentialligningerne - Beviser

De følgende beviser er baseret på sætningen, der siger, at

$$y' = 0 \tag{9.1}$$

har den fuldstændige løsning

$$y = c, \quad c \in \mathbb{R} \tag{9.2}$$

Sætning 8. *Differentialligningen,*

$$y' = ay \tag{9.3}$$

har den fuldstændige løsning

$$y = c\, e^{ax}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{9.4}$$

Bevis. En funktion, $g(x)$, er fastlagt ved følgende:

$$g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-ax}. \tag{9.5}$$

$g(x)$ er endvidere defineret til at være en løsning til $y' = 0$. Først vises det, at $f(x)$ er en løsning til $y' = ay$, hvilket viser sig, at være en direkte konsekvens af definitionen af $g(x)$:

$$f(x)\,\mathrm{e}^{-ax} \text{ er en løsning til } y' = 0 \iff \tag{9.6}$$

$$\left(f(x)\,\mathrm{e}^{-ax}\right)' = 0 \iff \tag{9.7}$$

$$f'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} + f(x)(-a)\,\mathrm{e}^{-ax} = 0 \iff \tag{9.8}$$

$$f'(x) - af(x) = 0 \iff \tag{9.9}$$

$$f'(x) = af(x). \tag{9.10}$$

Det er således vist, at $f(x)$ er en løsning til $y' = ay$.

Ved anvendelse af, at $g(x)$ er en løsning til $y' = 0$ fås umiddelbart, at

$$f(x)\,\mathrm{e}^{-ax} = c, \tag{9.11}$$

hvor c er konstant. Ved isolation af $f(x)$ fås

$$f(x) = c\,\mathrm{e}^{ax}. \tag{9.12}$$

□

Sætning 9. *Differentialligningen,*

$$y' = b - ay, \quad a \neq 0 \tag{9.13}$$

har den fuldstændige løsning

$$y = \frac{b}{a} + c\, e^{-ax}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{9.14}$$

Bevis. En funktion, $g(x)$, fastlægges ved

$$g(x) = f(x) - \frac{b}{a} \tag{9.15}$$

hvor $g(x)$ defineres til at være en løsning til $y' = -ay$. Det vises først, at $f(x)$ er en løsning til $y' = b - ay$:

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{b}{a} \text{ er en løsning til } y' = -ay & \iff & (9.16) \\ \left(f(x) - \frac{b}{a}\right)' = -a\left(f(x) - \frac{b}{a}\right) & \iff & (9.17) \\ f'(x) = b - af(x). & & (9.18) \end{aligned}$$

$f(x)$ er således en løsning til $y' = b - ay$. Vi kan skrive $g(x)$ som

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \frac{b}{a} && (9.19) \\ &= ce^{-ax}. && (9.20) \end{aligned}$$

Dvs.,

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{b}{a} &= c\,\mathrm{e}^{-ax} \iff && (9.21) \\ f(x) &= \frac{b}{a} + c\,\mathrm{e}^{-ax}. && (9.22) \end{aligned}$$

□

Sætning 10. *Den logistiske differentialligning,*

$$y' = ay(M - y), \quad a \neq 0, M \neq 0 \tag{9.23}$$

har den fuldstændige løsning,

$$y = 0 \quad \vee \quad y = \frac{M}{1 + ce^{-aMx}}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{9.24}$$

Bevis. Den trivielle løsning til sætning 10 kan nemt bevises ved indsættelse af $y = 0$ i (9.23)

Vi skal som beskrevet vise, at den logistiske differentialligning derudover har den ikke-trivielle løsning,

$$y = \frac{M}{1 + c\,\mathrm{e}^{-aMx}}. \tag{9.25}$$

Vi skriver leddet ce^{-aMx}, som en funktion $g(x) \equiv ce^{-aMx}$. Det er tidligere bevist, at en funktion som $g(x)$ er løsning til $y' = -aMy$. Ved indsættelse af $g(x)$ i (9.25) fås

$$f(x) = \frac{M}{1 + g(x)}. \tag{9.26}$$

Ved isolation af $g(x)$ i (9.26) fås:

$$g(x) = \frac{M}{f(x)} - 1. \tag{9.27}$$

Ved udnyttelse af, at $g(x)$ er løsning til $y' = -aMy$ kan vi vise, at $f(x)$ er løsning til differentialligningen, $y' = ay(M - y)$:

$$\begin{aligned}
g(x) \text{ er løsning til } y' = -aMy &\iff && (9.28)\\
\frac{M}{f(x)} - 1 \text{ er løsning til } y' = -aM\left(\frac{M}{f(x)} - 1\right) &\iff && (9.29)\\
\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}x}\left(\frac{M}{f(x)} - 1\right) = -aM\left(\frac{M}{f(x)} - 1\right) &\iff && (9.30)\\
\frac{-Mf'(x)}{(f(x))^2} = -aM\left(\frac{M}{f(x)} - 1\right) &\iff && (9.31)\\
f'(x) = a(f(x))^2\left(\frac{M}{f(x)} - 1\right) &\iff && (9.32)\\
f'(x) = af(x)(M - f(x)). & && (9.33)
\end{aligned}$$

Af (9.33) fremgår det direkte, at $f(x)$ er en løsning til $y' = ay(M - y)$. Nu mangler vi blot at bestemme løsningsformlen for differentialligningen.

Det vides, at $g(x)$ er løsning til $y' = -aMy$. Ved indsættelse af $g(x) = c\mathrm{e}^{-aMx}$ i (9.27) fås

$$\begin{aligned}
\frac{M}{f(x)} - 1 = c\mathrm{e}^{-aMx}, \quad c \in \mathbb{R} \qquad &\iff && (9.34)\\
f(x) = \frac{M}{1 + c\mathrm{e}^{-aMx}}, \quad M \neq 0. & && (9.35)
\end{aligned}$$

Da $M \neq 0$ ses det, at en løsning på formen (9.35) ikke kan have funktionsværdien, 0. Nulløsningen og den anden ikke-trivielle løsning vil således aldrig overlappe hverandre. $\square$

10 Panserformlen

Sætning 11 (Panserformlen)**.** *Hvis p og q er kontinuerte funktioner på et interval $\mathcal{I}$ har differentialligningen,*

$$y' + p(x)y = q(x), \quad x \in \mathcal{I} \tag{10.1}$$

den fuldstændige løsning,

$$y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x) \boldsymbol{d}x + Ce^{-P(x)} \tag{10.2}$$

Bevis. Da p er kontinuert i $\mathcal{I}$ har denne en stamfunktion, P, i dette interval. Da $e^{P(x)} > 0$ for alle $x \in \mathcal{I}$ har (10.1) samme løsninger som

$$e^{P(x)} y' + e^{P(x)} p(x) y = e^{P(x)} q(x) \ . \tag{10.3}$$

Venstresiden er differentialkvotienten af et produkt. Heraf fås:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}x}\left(e^{P(x)} y\right) = e^{P(x)} q(x) \qquad \Longleftrightarrow \tag{10.4}$$

$$e^{P(x)} y = \int e^{P(x)} q(x)\ \boldsymbol{d}x + C, \quad C \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \tag{10.5}$$

$$y = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x) \boldsymbol{d}x + Ce^{-P(x)} \tag{10.6}$$

□

Vi har til sidst indført den arbitrære konstant, C. $y(x)$ er her defineret i hele $\mathcal{I}$.

Til tider skrives panserformlen også som følgende:

$$y(x) = e^{-\int p(x)\boldsymbol{d}x} \int e^{\int p(x)\boldsymbol{d}x} q(x) \boldsymbol{d}x + Ce^{-\int p(x)\boldsymbol{d}x} \tag{10.7}$$

Den kaldes panserformlen, efterdi den er *pansret til* med integraltegn!

11 Separation af de variable og entydighed

Vi vil betragte differentialligningen

$$\frac{\boldsymbol{d}y}{\boldsymbol{d}x} = \frac{y(1-y)}{1+x^2} \tag{11.1}$$

og vurdere egenskaberne af løsningerne til denne.

Først ses det, at udtrykket $y(1-y)$ netop er 0 for $y = 0$ samt for $y = 1$. Differentialligningen (11.1) har således de to konstante løsninger,

$$f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Inden der gøres yderligere betragtninger om (11.1) vil vi dog lige tage et kig på entydighedssætningen:

Sætning 12 (Entydighedssætningen)**.** *Lad $\mathcal{I}$ være et interval der indeholder x_0 og $\mathcal{J}$ et interval der indeholder y_0 og betragt så begyndelsesværdiproblemet*

$$\frac{\boldsymbol{d}y}{\boldsymbol{d}x} = h(x) \cdot g(y), x \in \mathcal{I}, y \in \mathcal{J}, y(x_0) = y_0\ .$$

Hvis h er kontinuert i $\mathcal{I}$ og g er differentiabel med kontinuert afledet i $\mathcal{J}$, så har begyndelsesværdiproblemet højst én løsning defineret i $\mathcal{I}$ med værdier i $\mathcal{J}$.

Vi vil nu ses på egenskaberne for eventuelle ikke-konstante løsnigner. Vi vil se på tre forskellige intervaller:

$$\mathcal{J}_1 =]1; \infty[\qquad \mathcal{J}_2 =]0; 1[\qquad \mathcal{J}_3 =]-\infty; 0[$$

Ifølge entydighedssætningen kan eventuelle ikke-konstante løsninger have et af de ovenstående tre intervaller som værdimængde.

Såfremt en løsning har $\mathcal{J}_1$ som værdimængde er $y > 1$ for alle x i den givne funktions definitionsmængde (Denne kaldes $\mathcal{I}_1$). At $y > 1$ betyder følgende:

$$y > 1 \implies \frac{y(1-y)}{1+x^2} < 0 \iff \frac{\boldsymbol{d}y}{\boldsymbol{d}x} < 0 \implies y \text{ er aftagende, når } x \in \mathcal{I}_1$$

Tilsvarende kan det vises, at følgende gælder for løsninger med værdier i henholdsvis J_2 og J_3:

$$0 < y < 1 \implies \frac{y(1-y)}{1+x^2} > 0 \iff \frac{\boldsymbol{d}y}{\boldsymbol{d}x} > 0 \implies y \text{ er voksende, når } x \in \mathcal{I}_2$$

$$y < 0 \implies \frac{y(1-y)}{1+x^2} < 0 \iff \frac{\boldsymbol{d}y}{\boldsymbol{d}x} < 0 \implies y \text{ er aftagende, når } x \in \mathcal{I}_3$$

Det skal selvfølgelig bemærkes, at eventuelle partikulære løsninger til differentialligningen kun vil være defineret i et begrænset interval.

En løsning med værdier i $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ eller $\mathcal{J}_3$ er givet ved:

$$y(x) = \frac{c}{c - e^{-\arctan x}}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{11.2}$$

Vi har her krævet, at $c \neq 0$ således, at den konstante løsning $y(x) = 0$ ikke er tilladt ud fra denne formel (Vi ønskede jo at bestemme et udtryk for løsningerne med værdimængde i intervallerne; $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ eller $\mathcal{J}_3$). Af (11.2) ses det, at definitionsmængde må begrænses af at følgende skal være opfyldt:

$$c - e^{-\arctan x} \neq 0$$

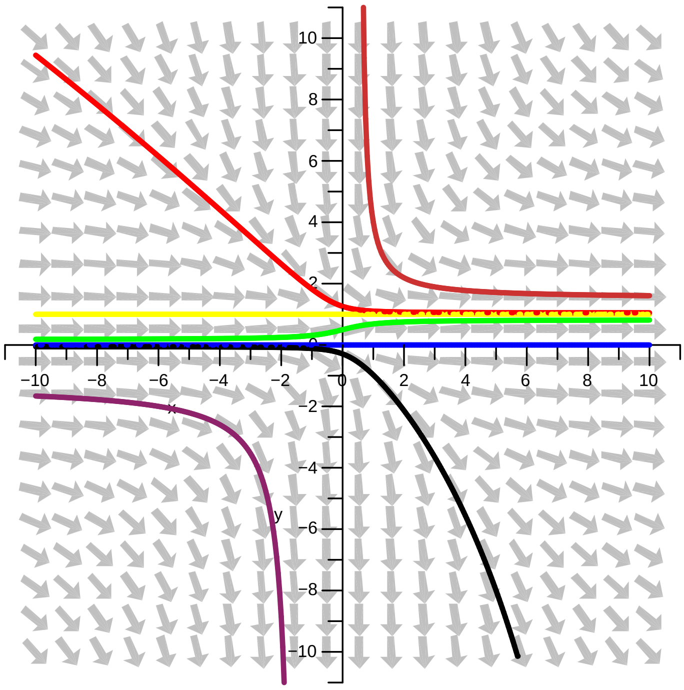

Fig. 2: Her ses et hældningsfelt samt en række løsninger med begyndelsesværdibetingelserne, $y(-7) = 7, y(1) = 4, y(1) = 1, y(0) = 0.5, y(1) = 0, y(-6) = -2, y(5) = -8$.

12 Lamberts W-funktion

Funktionen $w \longmapsto we^w$ er voksende for $w \geq -1$ og aftagende for $w \leq -1$. Den omvendte funktion til $w \longmapsto we^w, w \in [0\,;\infty\,[$ er Lamberts W-funktion også kaldet omegafunktionen. Jeg vil her betegne den som $W(x)$ (I Maple LambertW og i Mathematica ProductLog). Den er defineret for $x \geq -e^{-1}$ ved

$$y = W(x) \iff x = ye^y \wedge y \in [-1;\ \infty\,[$$

Lambert (1758) overvejede løsningen til

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)\nu x^{\alpha+\beta},$$

kendt som Lamberts transcendentale ligning. Og som det var med alt andet matematik, kiggede Euler forbi. Euler (1783) skrev en artikel om Lamberts transcendentale ligning. I sin artikel præsenterede Euler tilfældet, hvor $\alpha \to \beta$, hvor ligningen reduceres til $\ln x = \nu x^\beta \iff x = \exp\left(-\frac{W(-\beta\nu)}{\beta}\right)$, hvilket næsten er definitionen af $W(x)$, selvom Euler foreslog, at man definerede en funktion mere lignende $-W(-x)$. Euler citerer Lambert som ham, der først studerede denne ligning.

Eisenstein (1844) studerede rækken af det uendelige „power tower"

$$h(z) = z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$$

hvilket kan udtrykkes på den lukkede form

$$h(z) = -\frac{W(-\ln z)}{\ln z}$$

Generelt gælder det, at hvis en funktion f, der er givet ved $f:\ x \longmapsto x\alpha^x$ sættes lig med et tal β, så fås ved løsning af den fremkomne ligning med hensyn til x: $x = \frac{W(\beta \ln \alpha)}{\ln \alpha}$.

Eksempel 1. *En funktion f er givet ved $f:\ x \longmapsto xe^x$. Sættes denne lig med 2, fremkommer ligningen $xe^x = 2$, og vi er interesserede i at løse denne med hensyn til x. Vha. definitionen for $W(x)$ fås*

$$xe^x = 2 \iff x = \frac{W(2\ln e)}{\ln e} \iff x = W(2)$$

Opløftes den variable til sig selv, gælder følgende generelle udsagn

$$ax^{bx} = c \iff x = \frac{\ln\left(\frac{c}{a}\right)}{b\, W\left(\frac{\ln\left(\frac{c}{a}\right)}{b}\right)}$$

Eksempel 2. *En funktion f er givet ved $f:\ x \longmapsto 2x^{3x}$. Denne funktion sættes lig med 5, og vi løser for x:*

$$2x^{3x} = 5 \iff \frac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{3\,W\left(3\ \ln\left(\frac{5}{2}\right)\right)}$$

13 Vektorer

13.1 Introduktion til vektorer

En vektor kan geometrisk opfattes som en skalar med en retning. En vektor i $\mathbb{R}^3$ skrives for eksempel som

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{13.1}$$

Hvis en repræsentant for $\overline{a}$ afsættes i $\mathcal{O}$ er $\overline{a}$ retningsvektor for punktet, (a_1, a_2, a_3).

13.2 Skalarprodukt

Skalarproduktet for to vektorer, $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^3$, defineres ved

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{13.2}$$

En sætning siger, at skalarproduktet er invariant (= uafhængigt af det valgte koordinatsystem). For at bevise, at dette er tilfældet, isoleres $\overline{a} \cdot \overline{b}$ i regnereglen, $(\overline{a} + \overline{b})^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 + 2\overline{a} \cdot \overline{b}$:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \frac{1}{2}\left((\overline{a} + \overline{b})^2 - \overline{a}^2 - \overline{b}^2\right) \tag{13.3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\overline{a} + \overline{b}|^2 - |\overline{a}|^2 - |\overline{b}|^2\right) \tag{13.4}$$

Heraf ses det, at skalarproduktet, alene afhænger af længden af vektorerne $\overline{a}$ og $\overline{b}$. Og da længder pr. definition er invariante i $\mathbb{R}^3$, er skalarproduktet også invariant.

Sætning 13 (Vinklen mellem to vektorer)**.** *For vinklen, v, mellem to egentlige vektorer i $\mathbb{R}^2$ gælder*

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos v \tag{13.5}$$

Bevis. Det er netop vist, at skalarproduktet er invariant. Derfor kan vi vælge at udregne skalarproduktet i et vilkårligt koordinatsystem og få det samme resultat, som hvis vi havde valgt et vilkårligt andet koordinatsystem.

For at udføre beviset betragtes koordinatsystemet, hvor

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} |\overline{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13.6}$$

$\overline{b}$ kan så skrives som

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} |\overline{b}| \cos v \\ |\overline{b}| \sin v \end{pmatrix} \tag{13.7}$$

Heraf fås for prikproduktet:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos v \tag{13.8}$$

□

Det skal bemærkes, at sætning 13 eksempelvis også gælder for vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Fremgangsmåden i det netop udførte bevis er bemærkelsesværdig. Vi valgte at udregne skalarproduktet i et koordinatsystem, hvor udregningerne var særligt lette. Uden videre kunne vi overføre resultatet til også at gælde i alle andre koordinatsystemer.

Sætninger og regneregler kan altså tolkes absolut. Et udtryk som $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$ er således enten rigtigt eller forkert i alle koordinatsystemer. For at tjekke om udtrykket er sandt, kan man definere et koordinatsystem, hvor $\overline{a}$ og $\overline{b} + \overline{c}$ afsættes i et punkt. Hvis udtrykket er sandt i dette koordinatsystem vil det således også være rigtigt i alle andre koordinatsystemer. Man siger, at vektorer er *form-invariante* over for valget af referencesystem.

13.3 Metrik og skalarprodukt

Metrikken i et rum fastlægger geometrien af et rum. I $\mathbb{R}^3$ er metrikken defineret ved

$$(\Delta r)^2 \equiv (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{13.9}$$

hvor Δr kaldes afstanden mellem to punkter, og $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ er differensen mellem de to punkters x-, y- og z-koordinater hhv.

Eksempelvis kan kvadradet af længden af en vektor $\overline{a}$ findes som afstanden mellem $\mathcal{O}$ og retningspunktet for $\overline{a}$, når denne afsættes i $\mathcal{O}$:

$$(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \tag{13.10}$$

Og dette er åbenlyst lig $\overline{a} \cdot \overline{a}$. Der er således en sammenhæng mellem prikproduktet af to vektorer i et rum og metrikken i et rum.

Eksempel 3 (Metrikken i Minkowski-rumtiden)**.** *Metrikken i Minkowski-rumtiden, $\mathcal{M}^4$, er eksempelvis defineret ved,*

$$(\Delta s)^2 \equiv (\Delta x_0)^2 - (\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2 - (\Delta x_3)^2 \tag{13.11}$$

hvor vi altså betragter to punkter på formen, (x_0, x_1, x_2, x_3).

Tilsvarende er det invariante skalarprodukt mellem to vektorer $\overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{M}^4$ givet ved

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \equiv A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 \tag{13.12}$$

hvilket jo netop er den samme sammensætning af $+$'er og $-$'er som i (13.11)*.*

13.4 Tværvektor

Når en vektor $\overline{a} \in \mathbb{R}^2$ roteres 90 grader i positiv omløbsretning fås dennes tværvektor,

$$\hat{\overline{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{13.13}$$

For at bevise dette skrives vektoren først på formen,

$$\overline{a} = |\overline{a}| \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \tag{13.14}$$

Ved at addere v med 90 grader fås det ønskede udtryk for tværvektoren:

$$\overline{a} = |\overline{a}| \begin{pmatrix} \cos(v+90) \\ \sin(v+90) \end{pmatrix} = |\overline{a}| \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{13.15}$$

13.5 Determinant

Determinanten, $\det(\overline{a}, \overline{b})$ for to vektorer $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^2$ defineres ved

$$\det(\overline{a}, \overline{b}) \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{13.16}$$

Determinanten har bl.a. følgende egenskaber:

- $\det(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \sin v$.
- $\det(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \iff \overline{a} \parallel \overline{b} \quad \vee \quad \overline{a} = \overline{0} \quad \vee \quad \overline{b} = \overline{0}$.
- $|\det(\overline{a}, \overline{b})|$ er arealet af parallellogrammet, der udspændes af $\overline{a}$ og $\overline{b}$.

For at bevise formlen, $\det(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \sin v$, betragtes et koordinatsystem, hvori de to vektorer, $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^2$, er givet ved:

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} |\overline{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} |\overline{b}| \cos v \\ |\overline{b}| \sin v \end{pmatrix} \tag{13.17}$$

Heraf fås for $\det(\overline{a}, \overline{b})$

$$\det(\overline{a}, \overline{b}) = \hat{\overline{a}} \cdot \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ |\overline{a}| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\overline{b}| \cos v \\ |\overline{b}| \sin v \end{pmatrix} = |\overline{a}||\overline{b}| \sin v \tag{13.18}$$

Hermed er det ønskede vist. $\square$

13.6 Projektion af vektorer

En vektor kan deles i forskellige komposanter. Eksempelvis kan en vektor med komponenterne, (a_1, a_2), opløses til to andre vektorer med komponenterne $(a_1, 0)$ og $(0, a_2)$. Vi har således fået dannet 2 nye vektorer, der er parallelle med henholdvis første- og anden-aksen.

Man kan også projicere en vektor $\overline{a}$ ind på en vektor $\overline{b}$:

Sætning 14 (Projektionsformlen)**.** *Lad $\overline{a}$ være en egentlig vetkor i $\mathbb{R}^2$ og lad $\overline{b}$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^2$. Så gælder følgende for projektionen af $\overline{b}$ på $\overline{a}$:*

$$\overline{b}_{\overline{a}} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}|^2}\overline{a} \tag{13.19}$$

Bevis. Først laves en figur af en vektor $\overline{b}$ og projektionen af denne på en vektor $\overline{a}$:

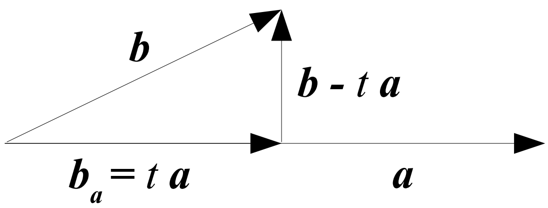

Fig. 3: Dette er en figur af situationen. Vektorer er markeret med **fede** bogstaver.

På figuren er desuden indtegnet vektoren, $\overline{b} - \overline{b}_{\overline{a}} = \overline{b} - t\overline{a}$ (t er en konstant). Af figuren fremgår det, at $\overline{b}_{\overline{a}} = t\overline{a}$. Endvidere fremgår det, at $\overline{a}$ og $\overline{b} - t\overline{a}$ er ortogonale. Det følger heraf, at deres skalarprodukt er nul, hvilket giver:

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} - t\overline{a}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \tag{13.20}$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} - t\overline{a} \cdot \overline{a} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \tag{13.21}$$

$$t = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}|^2} \tag{13.22}$$

Ved indsættelse af den bestemte værdi for t i $\overline{b}_{\overline{a}} = t\overline{a}$ fås:

$$\overline{b}_{\overline{a}} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}|^2}\overline{a} \tag{13.23}$$

□

Det skal også nævnes at følgende gælder:

$$|\overline{b}_{\overline{a}}| = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}|} \tag{13.24}$$

14 Rumgeometri

14.1 Objekter

I dette underafsnit præsenteres de vigtigste objekter i det tredimensionelle rum og der præsenteres nogle mere generelle formler, som gælder i højere dimensioner. Beviser udelades desuden.

14.1.1 Linier

Intuitivt kan man sige, at en linje er en uendelig lang og uendelig tynd lige kurve. I det euklidiske rum er en den korteste afstand mellem to punkter langs en linje, der forbinder de to punkter.

En linie i $\mathbb{R}^n$ fastlægges ofte ved følgende delmængde af $\mathbb{R}^n$

$$L = \{\overline{a} + t\overline{b} \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{14.1}$$

hvor $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^n$.

I $\mathbb{R}^3$ skrives linien som følgende:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\} \tag{14.2}$$

hvor punktet (x_0, y_0, z_0) er indeholdt i linien og vektoren, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, er en retningsvektor for linjen.

Af (14.2) følger det, at en linjes parameterfremstilling er givet ved:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{14.3}$$

14.1.2 Kugler

Ved en kugle forstås mængden af et eller flere punkter, der har samme afstand fra et punkt – kuglens centrum. Om afstanden mellem to punkter i $\mathbb{R}^3$ gælder

$$r^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{14.4}$$

Kuglens centrum betegner vi (x_0, y_0, z_0). Kuglen med radius r i $\mathbb{R}^3$ er derfor givet ved følgende mængde,

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\} \tag{14.5}$$

En kugle i det euklidiske rum kan derfor beskrives ved ligningen,

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \tag{14.6}$$

Nu vil vi kigge på kugler i $\mathbb{R}^n$. Kuglens centrum skrives som $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Heraf fås for kuglens delmængde af $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^{n-1} &= \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; r^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \right\} \\ &= \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \\ &\quad r^2 = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 \}\end{aligned} \tag{14.7}$$

At sfæren skrives som $\mathbb{S}^{n-1}$ betyder, at den kan beskrives med $n - 1$ koordinater.

Eksempelvis kan en kugle i det tredimensionel rum beskrives med to koordinater. Og på himmelkuglen kan alle objekters positioner for eksempel bestemmes ved angivelse af en *rektascension* og en *deklination*.

14.1.3 Planer

Ved en plan i det tredimensionelle rum forstås en uendelig stor og uendelig tynd flade uden krumning.

I $\mathbb{R}^3$ fastlægges en plan oftest ud fra en normalvektor og et punkt på planen. Punktet betegnes $\mathcal{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ og normalvektoren skrives som:

$$\overline{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{14.8}$$

Ethvert punkt, $\mathcal{P}$, i planen må af åbenlyse årsager kunne skrives som mængden,

$$\alpha = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 \mid \overline{n} \cdot \overline{\mathcal{P}\mathcal{P}_0} = 0 \right\} \tag{14.9}$$

Dette giver for planens ligning:

$$\alpha\colon a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{14.10}$$

Her har vi givet $\mathcal{P}$ koordinaterne (x, y, z). Ved at indføre en størrelse defineret ved, $d \equiv -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, kan planens ligning skrives som:

$$\alpha\colon ax + by + cz + d = 0 \tag{14.11}$$

Hvis vi betragter en plan i $\mathbb{R}^n$ kan denne fastlægges ved mængden,

$$\alpha = \left\{ P \in \mathbb{R}^n \mid \overline{n} \cdot \overline{\mathcal{P}\mathcal{P}_0} = 0 \right\} \tag{14.12}$$

Det skal nævnes, at planen i rummet også kan beskrives ved hjælp af følgende parameterfremstilling:

$$\alpha\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \tag{14.13}$$

hvor $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ er retningsvektorer for planen og (x_0, y_0, z_0) er indeholdt i planen.

15 Statistik og sandsynlighed

15.1 Gennemsnit og standardafvigelse

15.1.1 Grundlæggende definitioner

For et talsæt med n observationer, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, defineres 3 vigtige størrelser som:

$$\langle X \rangle \equiv (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,\frac{1}{n} \tag{15.1}$$

$$\langle X^2 \rangle \equiv \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\frac{1}{n} \tag{15.2}$$

$$s \equiv \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} \tag{15.3}$$

hvor $\langle X \rangle$ kaldes middelværdien af X, $\langle X^2 \rangle$ er middelværdien af kvadratet af X og s er spredningen. $\langle X \rangle$ og $\langle X^2 \rangle$ er selvfølgelig mål for den gennemsnitlige beliggenhed af observationerne, hvorimod s er et mål for den gennemsnitlige afvigelse pr. observation i forhold til den gennemsnitlige beliggenhed.

15.1.2 Frekvens og Sandsynlighed

Frekvensen for et observationssæt defineres som hyppigheden[2], $h(x_i)$, af en observation divideret med antallet af observationer:

$$f(x_i) \equiv \frac{h(x_i)}{n} \tag{15.4}$$

Frekvensen for en observation, x_i, i et observationssæt beskriver således andelen af det totale antal observationer, n, som x_i udgør. Frekvensen er således alene baseret på et empirisk grundlag.

Sandsynligheden, $\mathcal{P}(X = x_1)$, for en observation, x_i, i et observationssæt beskriver ligesom frekvensen andelen af det totale antal observationer, som en given observation udgør. I modsætning til frekvensen defineres sandsynligheden dog alene ud fra et teoretisk grundlag.

Eksempel 4 (Forskellen på frekvens og sandsynlighed)**.** *Et eksempel på forskellen på frekvensen og sandsynligheden er et terningkast. Sandsynligheden for at slå en 6'er vil altid være $^1\!/_6$, hvorimod frekvensen sjældent vil være det. Slår man én gang med en terning og får en 3'er vil frekvensen af $f(x_i = 6)$ være 0, men $\mathcal{P}(X = 6)$ vil selvfølgelig stadig være $^1\!/_6$.*

Når man udfører et eksperiment tilpas mange gange – man forstørrer herved n for observationssættet – vil frekvensen nærme sig sandsynligheden. For at tage eksemplet fra før; slår man 6 millioner gange med en terning, vil antallet af 6'ere ligge tæt på 1 million.

[2] Hyppigheden er antallet af gange, som en observation optræder i et observationssæt.

Umiddelbart er det svært, at definere sandsynligheden, $\mathcal{P}$, for et givent udfald. En intuitivt nærliggende måde ville være følgende:

$$\mathcal{P}(X = x_i) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{h(x_i)}{n} \tag{15.5}$$

Man kan dog ikke uden videre definere dette. For det første skal det vises matematisk, at den givne grænseværdi overhovedet eksisterer og for det andet, vil det i praksis være umuligt at bestemme sandsynligheden for et givent udfald, da det ville være nødvendigt, at gentage et eksperiment uendeligt mange gange. Og hvis man ikke kan bestemme en sandsynlighed nøjagtigt, vil det være nødvendig at opstille modeller for usikkerheden af ens sandsynlighed, og denne usikkerhed ville derfor blive videreført i alle beregninger, hvori sandsynligheden indgår. Men selvom den givne definition ikke bruges er den alligevel taget med i nærværende tekst, da den intuitivt giver et meget godt billede af, hvad sandsynlighed er.

Når man skal tillæge et udfald en sandsynlighed, giver man begivenheden en sandsynlighed alene ud fra et teoretisk grundlag. Sandsynligheden er således et mål for, hvilken *tiltro* man tillægger et udfald. Dette er smart, idet man så kan tildele begivenheder sandsynligheder, selvom de aldrig er sket. At gøre noget sådant ville være totalt umuligt ved anvendelse af (15.5), idet n så ville være 0.

15.2 Exceptionelle udfald

15.2.1 Normale udfald, gråzoner og excepptionelle udfald

Et exceptionelt udfald, x_i, er defineret ved følgende:

$$x_i \text{ er exceptionel} \quad \Longleftrightarrow \quad |x_i - \langle x\rangle| > n\cdot s, \quad n \in \mathbb{R}_+ \tag{15.6}$$

Om andelen af exceptionelle udfald gælder så:

$$\epsilon \leq \frac{1}{n^2} \tag{15.7}$$

Man kan så altid bestemme n så den ønskede andel af observationerne er exceptionelle. Oftest sættes n til at være 2, hvilket gør at 25% af udfaldene er exceptionelle.

Ofte ønsker man også at have en *gråzone*, der markerer, at et udfald hverken er exceptionelt eller normalt. Et eksempel på hvordan man kan definere normale udfald, udfald i gråzoner og exceptionelle udfald ses her:

x_i er exceptionel	x_i er i en gråzone	x_i er normal
$\lvert x_i - \langle x\rangle\rvert > 3s$	$\lvert x_i - \langle x\rangle\rvert > 2s$	$\lvert x_i - \langle x\rangle\rvert \leq 2s$

15.2.2 Fejltyper

Når man behandler statistiske udfald kan det være svært, at afgøre om en afvigelse skyldes statistiske tilfældigheder, eller om der rent faktisk er en tendens i observationssættet, som udfaldene stammer fra.

Til at belyse sådanne fejl en smule vil jeg omtale fejltyper af type I og type II. Men først vil jeg dog introducere, hvad en *nulhypotese* er.

Nulhypotesen Inden man kan sige noget om, hvorvidt en fejl er af type I eller type II, skal man opsætte en hypotese, H_0, som enten kan være sand eller falsk. Hvis man ud fra en måling afgør, at H_0 er falsk, accepteres en anden hypotese, H_1, således, at denne er sand. Hvis man derimod siger, at H_0 er sand, bortkastes hypotesen H_1.

Man kan således ikke tage stilling til begge hypoteser. Man kan kun kigge på, om H_0 er sand/falsk, og derudfra er det afgjort hvad H_1 er (Dvs., om den er sand eller falsk).

Eksempel 5 (En nulhypotese)**.** *Jeg vil nu betragte en situation, hvor man skal afgøre om et ny-fremstillet lægemiddel er bedre end et gammelt lægemiddel. En nulhypotese kunne da være:*

H_0*: Det nye lægemiddel er bedre end det gamle.*

H_1 *ville så se således ud:*

H_1*: Det gamle lægemiddel er lige så godt eller bedre end det nye.*

Hvis H_0 *er sand vil man vælge, at anvende det nye lægemiddel, og hvis* H_0 *er falsk, vil man anvende det gamle lægemiddel, da man kender dets virkning bedre, idet det er blevet anvendt længde. En vigtig pointe er, at man aldrig direkte tager stilling til* H_1*, men kun afgør sandheden af* H_1 *ud fra, hvad man konkluderer om* H_0*.*

Fejl af type I og type II Når man skal afgøre om ens nulhypotese er sand eller falsk, kan man lave to forskellige fejl. Man kan acceptere nulhypotesen, selvom den rent faktisk er falsk (Fejl af type II), og man kan bortkaste ens nulhypotese, selvom den er sand (Fejl af type I). Dette kaldes henholdsvis for fejl af type II og type I. Der gælder altså:

- Ved fejl af type I bortkastes nulhypotesen, selvom denne er rigtig.
- Ved fejl af type II accepteres nulhypotesen, selvom denne er forkert.

Hvis man afprøver om ens hypotese er sand og får et exceptionelt (dårligt) udfald, vil man bortkaste ens hypotese. Når man bortkaster en hypotese pga. af et exceptionelt udfald, er der således risiko for at begå fejl af type

I. For at nedsætte risikoen for sådanne fejl kan man formindske den andel af udfald, som er exceptionelle. Dette vil dog forstørre risikoen for at begå fejl af type II, idet man så vil kunne komme til at acceptere sin nulhypose, selvom denne er forkert.

Eksempel 6 (Valg af medicin)**.** *Jeg vil nu se lidt mere på nulhypotesen fra eksempel 5. Når man skal vælge medicin, vil man typisk være helt sikker på, at den medicin man bruger ikke har nogle ukendte bivirkninger, og at den desuden er forholdsvis effektiv.*

Man vil således undgå fejl af type II, så man ikke kommer til at vælge den nye medicin, alene på baggrund af den statistiske usikkerhed, der er ved enkelte udfald i forhold til hele observationssættet.

Eksempel 7 (Terningekaster)**.** *En terningekaster påstår, at han har overnaturlige evner til at slå 6'ere. En statistiker vil undersøge, om dette er sandt, og opstiller nul-hypotesen;*

$$H_0: \textit{ Terningekasteren har overnaturlige evner}$$

Når man skal afgøre, om H_0 er sand, skal man på den ene side undgå fejl af type I, så man ikke kommer til at give terningekasteren urimelige vilkår, men på den anden side skal man også undgå fejl af type II, så man ikke konkluderer, at han har overnaturlige evner alene på baggrund af empiriske usikkerheder.

15.3 Endeligt sandsynlighedsfelt

Ved et endeligt sandsynlighedsfelt forstås en endelig mængde $\mathcal{U}$ og en funktion $\mathcal{P}$ med $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, som definitionsmængde, og som opfylder

$$\text{a:} \quad 0 \leq \mathcal{P}(u_i) \leq 1 \tag{15.8}$$

$$\text{b:} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(u_i) = 1\ . \tag{15.9}$$

En delmængde $\mathcal{H}$ af udfaldsrummet $\mathcal{U}$ kaldes en *hændelse*. Sandsynligheden, $\mathcal{P}$, for hændelsen er givet ved summen af sandsynlighederne for udfaldene.

Et sandsynlighedsfelt er *symmetrisk*, hvis sandsynlighederne for alle udfaldene i et udfaldsrum er ækvivalente.

Eksempel 8 (Et symmetrisk udfaldsrum)**.** *Et symmetrisk udfaldsrum kan man for eksempel finde ved at betragte en terning. Sandsynligheden for at slå 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 er $^1/_6$ og sandsynligheden for at få en af disse 6 i et kast er netop 1.*

Nu betragtes to hændelser $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ i et udfaldsrum $\mathcal{U}$. Følgende gælder da

$$\mathcal{P}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathcal{P}(\mathcal{A}) + \mathcal{P}(\mathcal{B}) - \mathcal{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \tag{15.10}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}) = \mathcal{P}(\mathcal{A}) - \mathcal{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \tag{15.11}$$

$$\mathcal{P}(\overline{\mathcal{A}}) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{A}) \tag{15.12}$$

hvor $\mathcal{P}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ er sandsynligheden for at $\mathcal{A}$ eller $\mathcal{B}$ sker, $\mathcal{P}(\mathcal{A} \backslash \mathcal{B})$ er sandsynligheden for at $\mathcal{A}$ sker og $\mathcal{B}$ ikke sker og $\mathcal{P}(\overline{\mathcal{A}})$ er sandsynligheden for, at $\mathcal{A}$ ikke sker.

15.4 Binomialfordelinger

15.4.1 Binomialkoefficienten

Ofte er det nyttigt at vide, hvor mange forskellige uordnede q-mængder[3] man kan lave ud af en n-mængde[4]. Det kan vises, at dette antal er lig binomialkoefficienten, der defineres ved

$$\binom{n}{q} = \frac{n!}{q!(n-q)!} \ . \tag{15.13}$$

15.4.2 Stokastiske variabler

Stokastiske variabler kan bruges til at beskrive stokastiske eksperimenter; altså eksperimenter, der har en given sandsynlighed for at give forskellige udfald. Der er således tale om endelige sandsynlighedsfelter, hvorfor (15.8) og (15.9) må være opfyldt.

Der findes to slags stokastiske variabler, nemlig *kontinuerte stokastiske variabler* og *diskrete stokastiske variabler*. En kontinuert stokastisk variabel kan tage alle værdier i et givet interval (Det kunne for eksempel være alle $x \in \mathbb{R}$), og man vil derudfra kunne lave en kontinuert sandsynlighedsfunktion for den kontinuerte stokastiske variabel.

Diskrete stokastiske variabler kan i modsætning til kontinuerte stokastiske variabler ikke beskrives ved kontinuerte sandsynlighedsfunktioner, idet diskrete variabler kun kan antage et tælleligt antal værdier $\{a_1, a_2, \ldots\}$.

15.4.3 Binomialfordelinger

Ved en binomialfordeling betragtes et *basiseksperiment*, som kan have hændelserne,

$$\mathcal{H} \quad \text{og} \quad \overline{\mathcal{H}} \ .$$

[3]Dvs., en mængde med q elementer

[4]Dvs., en mængde med n elementer.

Sandsynligheden for at $\mathcal{H}$ indtræffer kaldes p eller evt. $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ og sandsynligheden for at $\overline{\mathcal{H}}$ indtræffer er derfor $1-p$ ifølge (15.9). Normalt siger man, at hændelsen $\mathcal{H}$ er en succes og den komplementære hændelse $\overline{\mathcal{H}}$ er en fiasko.

Hvis man udfører et eksperiment, hvor de netop opskrevne betingelser gælder, og hvert eksperiment er uafhængigt af, hvad der er sket i de andre eksperimenter, har vi en binomialfordelt stokastisk variabel.

Indskud 1 (Uafhængige Hændelser)**.** *Om to uafhængige hændelser, $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$, gælder*

$$\mathcal{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathcal{P}(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{P}(\mathcal{B}) \tag{15.14}$$

Eksempler på to hændelser, der er uafhængige af hverandre, er udfaldet af to kast med en terning.

En binomialfordelt stokastisk variabel opfylder, at sandsynligheden for, at der kommer r succeser ved at gentage eksperimentet n gange, er givet ved,

$$\mathcal{P}(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r} \tag{15.15}$$

hvor p er sandsynligheden for succes, og X er den binomialfordelte stokastiske variabel.

Det skal bemærkes, at man ved en succes tillægger den stokastiske variabel værdien, 1, og ved fiasko værdien 0.

Middelværdien for den stokastiske variabel X er givet ved,

$$\langle X \rangle = n \cdot p \ . \tag{15.16}$$

Og spredningen ved

$$s = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \ . \tag{15.17}$$

Eksempel 9 (Anvendelse af binomialfordelingen)**.** *I en klasse med 27 elever er der 11 elever, som aldrig læser lektier; de andre læser hver gang. Til hver time vælges 5 elever, som skal til tavlen og forklare noget af lektien. Hver gang en elev vælges sker det ved lodtrækning og den samme elev kan godt komme op flere gange i løbet af en time. Derfor gælder der, at hver enkelt udvælgelse er uafhængig af alle tidligere udvælgelser. En stokastisk variabel, som derfor må være binormialfordelt, er givet ved:*

X *Antallet gange en uforberedt kommer til tavlen.*

Sandsynligheden for, at der på en time kommer 3 uforberedte elever til tavlen vil således være givet ved:

$$\mathcal{P}(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot (\frac{11}{27})^3 \cdot (\frac{16}{27})^1 \approx 0.16028872$$

Sandsynligheden for at der bliver tage netop 3 er således 16.0 %. Middelværdien af X kan også bestemmes:

$$\langle X \rangle = n \cdot p = 4 \cdot \frac{11}{27} \approx 1.629630$$

Der vil således gennemsnitligt blive taget 1.63 personer, der ikke har forberedt sig til tavlen.

Spredningen findes:

$$s = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{4 \cdot \frac{11}{27}(1 - \frac{11}{27})} \approx 0.982704$$

Spredningen er således 0.983. Ved at anvende de normale definitioner for, hvad et exceptionelt udfald er, kan det område findes, hvori udfaldene ikke er exceptionelle:

$$x_i = \langle X \rangle \pm 2 \cdot s = 1.629630 \pm 2 \cdot 0.982704 \approx 1.63 \pm 1.97$$

Her repræsenterer x_i et normalt udfald, der således ikke er exceptionelt.