Noter til Lineær Algebra

– Eksamensnoter til LinAlg

Martin Sparre, `www.logx.dk`,
August 2007,
Version $\frac{\pi^8}{9450}$.

Indhold

0.1 Om disse noter

Disse noter indeholder en stor del af eksamensensum til LinAlg-kurset på Københavns Universitet (2006). Dog er emnerne lineære ligningssystemer, Gauss-Elimination/Gauss-Jordan Elimination, matrixalgebra og determinanter ikke medtaget.

Versionsnummeret er givet ved $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}$, hvor p stiger med 1, når der udkommer en ny version.

Martin Sparre

`www.logx.dk`

1 Abstrakte vektorrum

1.1 Definition af et vektorrum

Lad mængden V være et vektorrum og lad $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Da gælder

$$\alpha\mathbf{x} \in V, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x}+\mathbf{y} \in V.$$

For $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ opstilles følgende aksiomer:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} &= \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) \\
\mathbf{y}+\mathbf{0} &= \mathbf{y} \qquad (\mathbf{0} \text{ kaldes 0-elementet}) \\
\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{x}+\mathbf{y} &= \mathbf{y}+\mathbf{x} \\
\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y} \\
(\alpha+\beta)\mathbf{x} &= \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x} \\
(\alpha\beta)\mathbf{x} &= \alpha(\beta\mathbf{x}) \\
1\mathbf{x} &= \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Elementerne i et vektorrum kaldes for *vektorer*.

Her følger nogle eksempler på vektorrum og elementer i disse:

Eksempel 1 (Vektorrummet $\mathbb{R}^n$) Talrummene $\mathbb{R}^n$ er vektorrum. Her er et eksempel på vektorer i henholdsvis $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^5$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 42 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \lhd$$

Eksempel 2 (Vektorrummet $\mathbb{R}^{m\times n}$) Mængden af alle $m \times n$ matricer er et vektorrum og betegnes $\mathbb{R}^{m\times n}$. Her er et eksempel på en vektor i $\mathbb{R}^{3\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 42 & 13 \\ 2 & 4 \\ -1 & 9801 \end{pmatrix}. \qquad \lhd$$

Eksempel 3 (Vektorrummet P_n) Med P_n betegnes mængden af polynomier af grad strengt mindre end n. Der gælder, at P_n er et vektorrum. Her ses eksempler på en vektor i P_3:

$$p(x) = 2x^2 - 4x - 12. \qquad \triangleleft$$

Eksempel 4 (Vektorrummet $C[a,b]$) Det kan vises, at mængden, som består af alle kontinuerte funktioner defineret på et interval $[a;b]$, udgør et vektorrum. Dette vektorrum betegnes $C[a,b]$. Et eksempel på en vektor i $C[-1,1]$:

$$f(x) = \tan(x). \qquad \triangleleft$$

Eksempel 5 (Vektorrummet $C^n[a,b]$) Mængden af alle n gange kontinuert differentiable funktioner på et interval $[a;b]$ udgør et vektorrum, kaldet $C^n[a,b]$. ◁

1.2 Underrum

Lad V være et vektorrum og lad $S \subseteq V$. Hvis S er en ikke-tom delmængde af V, så kaldes S et underrum af V, hvis følgende gælder:

$$\alpha\mathbf{x} \in S, \text{ for alle } \mathbf{x} \in S \text{ og alle } \alpha \in \mathbb{R}, \tag{i}$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S \text{ for alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S. \tag{ii}$$

Betingelses (i) siger, at S er lukket under skalarmultiplikation og (ii) siger, at S er lukket under addition af elementer i S.

I ethvert vektorrum V gælder der, at V og $\{\mathbf{0}\}$ er underrum. Disse to vektorrum kaldes *trivielle underrum*.

Der gælder generelt, at alle underrum i sig selv er vektorrum.

1.3 En matrices nulrum

Lad A være en $m \times n$ matrix. Så betegner $N(A)$ mængden af alle løsninger til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Der gælder, at

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Til at finde nulrummet for en matrix udføres Gauss elimination eller Gauss-Jordan elimination og herudfra bestemmes løsningsrummet $N(A)$ til ligningen $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Eksempel 6 (Bestemmelse af nulrum) Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Efter Gauss-Jordan elimination fås:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ligningssystemet tilsvarende denne matrix er:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 - x_4 \\ x_2 &= -2x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ved at sætte $x_3 = \alpha$ og $x_4 = \beta$ fås, at

$$N(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

hvor span angiver mængden, som udspændes af de to vektorer. $\triangleleft$

1.4 Lineær uafhængighed

Definition 1 (Lineær uafhængighed) Vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ er lineært uafhængige hvis udsagnet,

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

kun er sandt, når $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ er 0. $\triangleleft$

Definition 2 (Lineær afhængighed) Vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ er lineært afhængige, hvis udsagnet er sandt,

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

selvom ikke alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ er 0. $\triangleleft$

For at afgøre om n vektorer, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ i $\mathbb{R}^n$ er lineært afhængige kan man opskrive matricen,

$$X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) .$$

Vektorerne er lineært afhængige hvis og kun hvis $\det(X) = 0$.

En anden måde at teste, hvorvidt en samling af vektorer er lineært afhængige, er, at opskrive en matrix med de givne vektorer som søjlevektorer. Efter Gauss-elimination af matricen er der en nulrække, hvis og kun hvis de givne vektorer er lineært afhængige.

Hvis man har m vektorer i $\mathbb{R}^n$ og $m > n$ er de m vektorer altid lineært afhængige.

1.5 Basis og dimension

Definition 3 (En basis for et vektorrum) Vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis for vektorrummet V, hvis og kun hvis

(i) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er lineært uafhængige,

(ii) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ udspænder V. $\triangleleft$

Definition 4 (Dimensionen af et vektorrum) Lad V være et vektorrum. Hvis V har en basis, der består af n vektorer, så har V dimension n. Specielt defineres at underrummet $\{\mathbf{0}\}$ af V har dimension 0. $\triangleleft$

1.6 Skift af basis

Den naturlige basis for $\mathbb{R}^2$ er de to standardenhedsvektorer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. I stedet for disse kunne man vælge at beskrive vektorer i $\mathbb{R}^2$ ud fra en anden basis; eksempelvis vektorerne,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

som her er angivet i forhold til den naturlige basis.

Ved at bruge $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ som basisvektorer vil man ofte få brug for at løse følgende problemer:

1. Givet en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ mht. $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$, find dennes koordinater mht. $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$.

2. Givet en vektor $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$ find dennes koordinater mht. $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$.

Først løses problem 2. Det ses, at

$$\mathbf{u}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

Dvs.,

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 &= 3c_1\mathbf{e}_1 + 2c_1\mathbf{e}_2 + c_2\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 \\ &= (3c_1 + c_2)\mathbf{e}_1 + (2c_1 + c_2)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Ved at sætte $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ og $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$ fås:

$$\mathbf{x} = U\,\mathbf{c}. \tag{1.1}$$

Nu er problem 2 således løst.

U er sammensat af lineært uafhængige basisvektorer, hvorfor U er invertibel. Det følger af (1.1), at løsningen til problem 1 er

$$\mathbf{c} = U^{-1}\,\mathbf{x}.$$

Nu betragtes et mere generelt basisskift fra $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ til $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$. For at gå fra $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ til $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ skal den oprindelige koordinatvektor multipliceres med V. For at gå fra $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ til $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ skal der multpliceres med U^{-1} således, at koordinattransformationsmatricen bliver $U^{-1}V$. Koordinattransformationen illustreres her:

$$\begin{tikzcd} {[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]} \arrow[r, "V"] \arrow[dr, "U^{-1}V"'] & {[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]} \arrow[d, "U^{-1}"] \\ & {[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]} \end{tikzcd} .$$

I det netop gennemregnede eksempel optrådte, der vektorer i $\mathbb{R}^2$. Proceduren mht. basisskift kan dog let oversættes til ethvert andet endelig dimensionalt vektorrum;

Definition 5 Lad V være et vektorrum med den tilhørende ordnede basis $E = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$. Hvis $\mathbf{v}$ er et element i V, så kan $\mathbf{v}$ skrives som

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n,$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ er skalarer. Vektoren $\mathbf{v} \in V$ kan præsenteres af vektoren $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ i $\mathbb{R}^n$. Vektoren $\mathbf{c}$ kaldes *koordinatvektoren* af $\mathbf{v}$ mht. den ordnede base E og betegnes $[\mathbf{v}]_E$. c_i'erne er koordinaterne af $\mathbf{v}$ med hensyn til E. $\triangleleft$

1.7 Rækkerum og søjlerum

I dette delafsnit præsenteres en række af de vigtigste sætninger og definitioner angående rækkerum og søjlerum. Først præsenteres definitionen af rækkerum og søjlerum;

Definition 6 Lad A være en $m \times n$ matrix. Underrummet af $\mathbb{R}^{1\times n}$ som udspændes af matricens rækkevektorer kaldes *rækkerummet* for A. Underrummet af $\mathbb{R}^m$, som udspændes af søjlevektorerne i A, kaldes *søjlerummet* for A. $\triangleleft$

Sætning 1 To rækkeækvivalente matricer har samme rækkerum. $\triangleleft$

Definition 7 (Rang) Rangen af en matrix A er dimensionen af rækkerummet for matricen A. $\triangleleft$

Eksempel 7 Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ved at udføre Gauss-elimination fås

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rækkerummet for matricerne A og U er således udspændt af de to vektorer $(1, -2, 3)^T$ og $(0, 1, 5)^T$. Rangen af begge matricer er 2. $\triangleleft$

Sætning 2 (Konsistens af lineære systemer) Et lineært system $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent, hvis og kun hvis $\mathbf{b}$ er indeholdt i søjlerummet for A. $\lhd$

I øvrigt gælder der, at summen af rangen og dimensionen af nulrummet altid er lig antallet af søjler i en matrix.

Sætning 3 Hvis A er $m \times n$, så er dimensionen af rækkerummet lig dimensionen af søjlerummet. $\lhd$

2 Lineære afbildninger

2.1 Definition af en lineær afbildning

Definition 8 En afbildning $L : V \longrightarrow W$ er en *lineær afbildning*, hvis

$$L(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \alpha L(\mathbf{v}_1) + \beta L(\mathbf{v}_2),$$

for alle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ og for alle skalarer α og β. $\lhd$

Heraf følger, at en afbildning er lineær, hvis og kun hvis den opfylder følgende:

1. $L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2)$.
2. $L(\alpha\mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{v})$.

Eksempel 8 Betragt operatoren $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ defineret ved

$$L(\underline{x}) = (-x_2, x_1)^T.$$

Det kan let eftervises, at L er en lineær afbildning:

$$\begin{aligned} L(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} -\alpha x_2 - \beta y_2 \\ \alpha x_1 + \beta y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha x_2 \\ \alpha x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta y_2 \\ \beta y_1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha L(\mathbf{x}) + \beta L(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Det er hermed vist, at afbildningen er lineær. $\lhd$

Definition 9 (Kernen af en lineær afbildning) Lad $L : V \longrightarrow W$ være en lineær afbildning. *Kernen* af L er givet ved

$$\ker(L) = \{\mathbf{v} \in V | L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}. \quad \lhd$$

2.2 Matrixrepræsentation af lineære afbildninger

Der gælder, at enhver lineær afbildning af typen $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kan repræsenteres af en $m \times n$ matrix. Dette følger af denne sætning:

Sætning 4 Hvis L er en lineær afbildning fra $\mathbb{R}^n$ ind i nymodens $\mathbb{R}^m$, så eksisterer der netop en $m \times n$ matrix A så

$$L(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x},$$

for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Den j'e søjle i A er givet ved

$$\mathbf{a}_j = L(\mathbf{e}_j). \qquad \triangleleft$$

Eksempel 9 Lad $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være defineret ved

$$L(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)^T.$$

Nu skal matricen tilsvarende denne lineære afbildning findes. Når L virker på de tre naturlige basisvektorer i $\mathbb{R}^3$ fås følgende for de tre søjlevektorer i A:

$$L(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det følger nu af sætning 4, at

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \triangleleft$$

I den følgende sætning betragtes mere generelle lineære afbildninger fra et vektorrum V med basen $E = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ til et andet vektorrum W med basen $F = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m]$:

Sætning 5 Lad $E = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ og $F = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m]$ være ordnede baser for henholdsvis V og W. Til enhver lineær afbildning $L : V \longrightarrow W$ er der en $m \times n$ matrix A således, at

$$[L(\mathbf{v})]_F = A[\mathbf{v}]_E$$

for alle $\mathbf{v} \in V$.

A er her matricen, som repræsenterer L mht. de ordnede baser E og F. Der gælder, at

$$\mathbf{a}_j = [L(\mathbf{v}_j)]_F. \qquad \triangleleft$$

Eksempel 10 Lad $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være defineret ved

$$L(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{b}_1 + (x_2 + x_3)\mathbf{b}_2,$$

hvor

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu skal matricen A, der repræsenterer den lineære afbildning mht. de ordnede baser $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ og $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$, findes.

Der gælder, at

$$\begin{aligned} L(\mathbf{e}_1) &= 1\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2 \Longrightarrow [L(\mathbf{e}_1)]_F = (1,0)^T \\ L(\mathbf{e}_2) &= 0\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 \Longrightarrow [L(\mathbf{e}_2)]_F = (0,1)^T \\ L(\mathbf{e}_3) &= 0\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 \Longrightarrow [L(\mathbf{e}_3)]_F = (0,1)^T. \end{aligned}$$

Af sætning 5 følger det nu, at

$$A = ([L(\mathbf{e}_1)]_F, [L(\mathbf{e}_2)]_F, [L(\mathbf{e}_3)]_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \triangleleft$$

Sætning 6 Lad $E = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n]$ og $F = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m]$ være baser for henholdsvis $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$. Hvis $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ er en lineær afbildning, så er den j'e søjle i matricen A, som repræsenterer L mht. E og F, givet ved

$$\mathbf{a}_j = B^{-1}L(\mathbf{u}_j),$$

hvor $B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m]$. $\triangleleft$

Sætning 7 Hvis A repræsenterer den lineære afbildning $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mht. til baserne

$$E = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \quad \text{og} \quad F = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m],$$

så er den reducerede rækkeechelonform af $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m | L(\mathbf{u}_1), \ldots, L(\mathbf{u}_n))$ givet ved $(I \,|\, A)$ $\triangleleft$

Se eksempel 6 side 190 i Leon.

2.3 Similære matricer

Sætning 8 Lad $E = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ og $F = [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n]$ være ordnede baser for et vektorrum V og lad L være en lineær operator på V. Transformationsmatricen, der repræsenterer skiftet fra F til E, kaldes S. Hvis A repræsenterer den lineære afbildning mht. basen E, så er matricen, der repræsenterer L mht. F givet ved

$$B = S^{-1} A\, S. \qquad \triangleleft$$

Definition 10 Lad A og B være $m \times n$ matricer. B er similær til A, hvis der findes en invertibel matrix S således, at

$$B = S^{-1} A\, S. \qquad \triangleleft$$

Det skal bemærkes, at hvis B er similær til A, så følger det, at A er similær til B.

3 Egenværdier

3.1 Egenværdier og egenvektorer

Definition 11 Lad A være en $n \times n$ matrix. En skalar λ er en *egenværdi* til A, hvis der findes en egentlig vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, så

$$A\,\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}. \tag{3.1}$$

$\mathbf{x}$ er da en *egenvektor*, som hører til λ. $\triangleleft$

(3.1) kan omskrives til

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Denne ligning har en ikke triviel løsning, hvis og kun hvis $A - \lambda I$ er singulær. Dvs., hvis

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Det *karakterristiske polynomium* defineres ved

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Rødderne til dette polynomium er egenværdierne til $n \times n$ matricen A. Det karakterristiske polynomium vil altid have n komplekse rødder (talt med multiplicitet).

For en $n \times n$ matrix A er følgende udsagn ækvivalente:

1. λ er en egenværdi for A.
2. $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en ikke-triviel løsning.
3. $N(A - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$.
4. $A - \lambda I$ er singulær.
5. $\det(A - \lambda I) = 0$.

Eksempel 11 Lad

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

For at finde egenværdierne til A opskrives det karakterristiske polynomium:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 12.$$

Dette giver egenværdierne $\lambda_1 = 4$ og $\lambda_2 = -3$.

Enhver vektor, der er element i nulrummet $N(A + 3I)$ er en egenvektor tilsvarende egenværdien -3. Enhver vektor, der er et element i nulrummet $N(A - 4I)$ er en egenvektor tilsvarende egenværdien 4. $\lhd$

3.2 Diagonalisering

Definition 12 En $n \times n$ matrix A er *diagonaliserbar*, hvis der findes en invertibel matrix X og en diagonalmatrix D så

$$X^{-1} A\, X = D.$$

Man siger, at X diagonaliserer A. $\lhd$

Sætning 9 En $n \times n$ matrix A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis A har n lineært uafhængige egenvektorer. $\lhd$

Vigtige bemærkninger:

1. Hvis A er diagonaliserbar, så er søjlevektorerne i diagonaliseringsmatricen X egenvektorer for A. Diagonalelementerne af D er de til egenvektorerne tilsvarende egenværdier.

2. Diagonaliseringsmatricen X er ikke unik. Ved at ombytte søjler for diagonaliseringsmatricen eller ved at multiplicere med en skalar, der er forskellig fra 0, kan man konstruere en ny diagonaliseringsmatrix.

3. Hvis A er $n \times n$ og A har n forskellige egenværdier, så kan A diagonaliseres. Hvis der er flere ækvivalente egenværdier så er A diagonaliserbar afhængigt af om, der er n lineært uafhængige egenvektorer (Se sætning 9).

4. Hvis A er diagonaliserbar, så kan A skrives som produktet $X\, D\, X^{-1}$.

5. $A^k = X\, D^k X^{-1}$.

4 Ortogonalisering

4.1 Skalarproduktet i $\mathbb{R}^n$

Skalarproduktet mellem to vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ defineres ved $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$. Dvs.,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Normen af en vektor defineres ved

$$||a|| \equiv \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

Projektionen af en vektor $\mathbf{a}$ på en vektor $\mathbf{b}$ er givet ved

$$\mathbf{a_b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^2}\mathbf{b}$$

og størrelsen af projektionen er

$$||\mathbf{a_b}|| = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{b}||}.$$

To vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er defineret til at være ortogonale, hvis $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Vinklen mellem $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||}.$$

4.2 Indre produkt rum

Definition 13 (Indre produkt) Et *indre produkt* på en vektor i et abstrakt vektorrum V er en operator på V, der til ethvert par af vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ tildeler en skalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, som opfylder

I $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, med lighed hvis og kun hvis $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

II $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.

III $\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ og alle skalarer α, β. $\lhd$

Et vektorrum V med et indre produkt kaldes et *indre produkt rum*. Her følger en række eksempler på indre produkter:

Eksempel 12 ($\mathbb{R}^n$) Skalarproduktet i $\mathbb{R}^n$ er et indre produkt;

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

Et andet eksempel på et indre produkt i $\mathbb{R}^n$ er

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i,$$

hvor $w_1, w_2, \ldots, w_n$ er skalarer. $\triangleleft$

Eksempel 13 ($\mathbb{R}^{m \times n}$) For $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kan man definere et indre produkt ved

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}. \qquad \triangleleft$$

Eksempel 14 ($C[a, b]$) Et eksempel på et indre produkt for $f, g \in C[a, b]$ er

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Hvis en funktion $w(x)$ er kontinuert på $[a, b]$ kan et indre produkt også defineres som

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) w(x) \, \mathrm{d}x. \qquad \triangleleft$$

Eksempel 15 (P_n) Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være forskellige skalarer. For ethvert par af polynomier af mindre grad end n kan man definere:

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) q(x_i). \qquad \triangleleft$$

Der gælder, at normen af en vektor i et indre produkt rum kan defineres ved:

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Definition 14 (Projektion) Lad $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vektorer i et indre produkt rum. Projektionen af $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ er

$$\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{v}||^2} \mathbf{v}. \qquad \triangleleft$$

4.3 Ortonormale systemer

Definition 15 (Ortogonalt system) Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ være vektorer forskellig fra nulvektoren i et indre produkt rum V. Hvis $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, når $i \neq j$, så er basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ et ortogonalt system. $\triangleleft$

Definition 16 (Ortonormalt system) Et ortonormalt system af vektorer er et ortogonalt sæt af enhedsvektorer. $\triangleleft$

Et system $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ er således ortonormalt, hvis og kun hvis

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j \end{cases}.$$

Hvis man har et ortogonalt system $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ kan man definere

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{||\mathbf{v}_i||}.$$

Da udgør $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ er ortonormalt system.

Her følger tre sætninger angående ortonormale baser:

Sætning 10 Lad $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ være en ortonormal basis for et indre produkt rum V. Hvis

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i,$$

så er

$$c_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle. \qquad \triangleleft$$

Af denne sætning følger det, at hvis man ønsker at skrive en vektor, som

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n,$$

hvor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ er en ortonormal basis, så er c_i givet ved

$$c_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle.$$

Sætning 11 Lad $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ være en ortonormal basis for et indre produkt rum V. Hvis $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i$ og $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{u}_i$, så er

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \qquad \triangleleft$$

Sætning 12 (Parseval's formel) Hvis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ er en ortonormal basis for et indre produkt rum V og $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i$, så er

$$||\mathbf{v}||^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2. \qquad \lhd$$

Eksempel 16 Lad $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ være en ortonormal basis for et indre produkt rum V. Betragt de to vektorer,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3,$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_3.$$

Ifølge sætning 11 er

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 7 = 15.$$

Og ifølge Parseval's formel er

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3,$$
$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}.$$

Om vinklen mellem de to vektorer gælder:

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||} = \frac{15}{3 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Hermed er $\theta = \frac{\pi}{4}$. $\lhd$

4.4 Ortogonale matricer

Definition 17 (Ortogonal matrix) En reel matrix Q er en *ortogonal* matrix, hvis søjlevektorerne i Q udgør et ortonormalt sæt i $\mathbb{R}^n$. $\lhd$

Sætning 13 En $n \times n$ matrix Q er ortogonal, hvis og kun hvis

$$Q^T Q = I. \qquad \lhd$$

Af denne sætning følger umiddelbart, at $Q^T = Q^{-1}$.

I øvrigt gælder altid, at $\langle Q\,\mathbf{x}, Q\,\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Hvis $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ gælder desuden, at $||Q\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$.

Sætning 14 Hvis A er en reel symmetrisk matrix, så findes der en ortogonal matrix U, som diagonaliserer A. Dvs.,

$$D = U^T A U,$$

hvor D er en diagonalmatrix. $\triangleleft$

En symmetrisk matrix er opfylder, at $A^T = A$.

Hvis A er en reel $n \times n$ matrix, så er følgende betingelser ækvivalente:

1. Der findes en orthonormal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A.
2. Der findes en matrix U, så $U^T AU$ er diagonal med egenværdier for A i diagonalen (U kan bestemmes ved at køre Gram-Schmidt på egenvektorerne i A. Søjlevektorerne i U er da vektorerne i den ortonormale basis).
3. A er symmetrisk; dvs., $A^T = A$.

4.5 Gram-Schmidt ortogonalisering

I dette kapitel beskrives Gram-Schmidt ortogonaliseringsmetoden. Ved hjælp af denne metode kan man ud fra enhver basis,

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n],$$

danne en ortonormal basis,

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n],$$

som opfylder, at

$$\text{span}\{[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n]\} = \text{span}\{[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n]\}.$$

Den første vektor i den ortonormale basis fås ved at normere $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{||\mathbf{x}_1||}.$$

For at konstruere den anden vektor i den ortonormale basis opskrives projektionen af $\mathbf{x}_2$ på nymodens $\mathbf{u}_1$ (Denne vektor kaldes $\mathbf{p}_1$):

$$\mathbf{p}_1 = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1$$

Der må af geometriske årsager gælde, at $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1) \perp \mathbf{u}_1$. Ved at normere $\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1$ denne kan man således danne en ny vektor i den ortonormale basis:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1}{||\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_1||}.$$

Den tredje vektor i den ortonormale basis kan konstrueres ved at definere vektoren,

$$\mathbf{p}_2 = \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2,$$

og så er

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{p}_2}{||\mathbf{x}_3 - \mathbf{p}_2||}.$$

Følgende sætning beskriver Gram-Schmidt Ortogonaliseringsmetoden:

Sætning 15 (Gram-Schmidt) Lad $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n]$ være en ortogonal basis for et indre produkt rum V. Lad

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{||\mathbf{x}_1||}$$

og definer $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \ldots, \mathbf{u}_n$ rekursivt ved

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k}{||\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_k||},$$

hvor

$$\mathbf{p}_k = \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \ldots + \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

er projektionen af $\mathbf{x}_{k+1}$ på spannet af $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k]$.

Der gælder, at $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n]$ er en ortonormal basis for V. $\triangleleft$

Bemærk at i udledning af Gram-Schmidt-metoden anvendte vi vores geometriske intuition om vektorer i $\mathbb{R}^n$. Metoden er dog ikke begrænset til vektorer i $\mathbb{R}^n$, men kan anvendes i alle abstrakte vektorrum.

5 Fourieranalyse

5.1 Ortonormal basis

I dette delafsnit forklares den teoretiske baggrund for fourierrækker.

Betragte et indre produkt rum, hvor det indre produkt mellem to funktion f og g er defineret ved

$$\langle f, g\rangle \equiv \frac{2}{L}\int_0^L f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Betragt funktionerne

$$\cos\left(\frac{2\pi r}{L}x\right),\ \cos\left(\frac{2\pi s}{L}x\right),\ \sin\left(\frac{2\pi r}{L}x\right),\ \sin\left(\frac{2\pi s}{L}x\right),$$

hvor r og s er ikke-negative heltal og L er en skalar. Ved at udregne indre produkter fås:

$$\begin{aligned}
\left\langle \cos\left(\frac{2\pi r}{L}x\right), \sin\left(\frac{2\pi s}{L}x\right)\right\rangle &= \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi r}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi s}{L}x\right)\mathrm{d}x \\
&= 0, \\
\left\langle \cos\left(\frac{2\pi r}{L}x\right), \cos\left(\frac{2\pi s}{L}x\right)\right\rangle &= \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi r}{L}x\right)\cos\left(\frac{2\pi s}{L}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} 2 \text{ for } r = s = 0 \\ 1 \text{ for } r = s > 0 \\ 0 \text{ for } r \neq s \end{cases} \\
\left\langle \sin\left(\frac{2\pi r}{L}x\right), \sin\left(\frac{2\pi s}{L}x\right)\right\rangle &= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi r}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi s}{L}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} 0 \text{ for } r = s = 0 \\ 1 \text{ for } r = s > 0 \\ 0 \text{ for } r \neq s \end{cases}
\end{aligned}$$

Ud fra de netop udregnede indre produkter ses det, at enhver funktion (der er uendeligt mange gange differentiabel) kan opskrives i en ortonormal basis således

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\left[a_r\cos\left(\frac{2\pi r}{L}x\right) + b_r\sin\left(\frac{2\pi r}{L}x\right)\right],$$

hvor de r'e koefficienter er givet ved projektionen af f på de r'e basisvektorer således:

$$a_r = \left\langle f, \cos\left(\frac{2\pi r}{L}x\right)\right\rangle = \frac{2}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} f(x)\cos\left(\frac{2\pi r}{L}x\right)\mathrm{d}x$$

$$b_r = \left\langle f, \sin\left(\frac{2\pi r}{L}x\right)\right\rangle = \frac{2}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} f(x)\sin\left(\frac{2\pi r}{L}x\right)\mathrm{d}x.$$

I det næste delafsnit opskrives dette resultat på mere stringent vis.

5.2 Fourierrækker

En funktion f kan udvikles vha. fourierrækker, hvis den opfylder *Dirichlets betingeler*:

i) f er periodisk,

ii) f skal være kontinuert. Dog er det tilladt med et endeligt antal diskoninuitetspunkter,

iii) f skal have et endeligt antal maksimum- og minimumpunkter inden for en enkelt periode,

iv) Integralet over en periode af $|f(x)|$ skal konvergere.

Hvis Dirichlets betingelser er opfyldt er fourierrækken for f givet ved

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\left[a_r\cos\left(\frac{2\pi r}{L}x\right) + b_r\sin\left(\frac{2\pi r}{L}x\right)\right],$$

hvor Fourier koefficienterne er givet ved

$$a_r = \frac{2}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} f(x)\cos\left(\frac{2\pi r}{L}x\right)\mathrm{d}x$$

$$b_r = \frac{2}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} f(x)\sin\left(\frac{2\pi r}{L}x\right)\mathrm{d}x.$$

Lige og ulige funktioner

For en funktion f gælder:

hvis f er lige er $f(-x) = f(x)$

hvis f er ulige er $f(-x) = -f(x)$

Eksempelvis er $f(x) = x^2$ en lige funktion og $f(x) = x^3$ er en ulige funktion. For enhver funktion gælder:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] + \frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right] \\ &= f_{\text{lige}}(x) + f_{\text{ulige}}(x) \end{aligned}$$

For en fourierrække repræsenterer a_r de lige led (I a_r indgår cosinus og cosinus er en lige funktion) og b_r repræsentere de ulige led (I b_r indgår sinus og sinus er en ulige funktion).

For en ulige funktion er alle a-leddene således 0 og tilsvarende er alle b-leddene 0 for en lige funktion. For en maclaurin-række gælder i øvrigt det samme.

5.3 Fouriertransformation

Den fouriertransformerede af en funktion $f(t)$ er givet ved

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t.$$

Den inverse er:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega.$$