Funktioner af flere variable

Stud. Scient. Martin Sparre
Københavns Universitet

23-10-2006

Definition 1 (Definition af en funktion af flere variable)**.** *En funktion af n variable defineret på en delmængde, $\mathcal{A}$ af $\mathbb{R}^n$, er en funktion $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, hvor $\mathcal{A}$ kaldes definitionsmængden for f.*

Topologi på $\mathbb{R}^n$

Randen, $\partial\mathcal{A}$, til en mængde $\mathcal{A}$, adskiller $\mathcal{A}$ fra det, der er udenfor $\mathcal{A}$. Et randpunkt er defineret ved, at man i dette kan placere en kugle, der både indeholder elementer, der er med i $\mathcal{A}$, og elementer, der ikke er med i $\mathcal{A}$.

Det indre af $\mathcal{A}$ er punkterne i $\mathcal{A}$, der ikke er randpunkter.

Tillukningen, $\overline{\mathcal{A}}$, af $\mathcal{A}$ er foreningsmængden af $\mathcal{A}$ og $\partial\mathcal{A}$. Dvs., $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \partial\mathcal{A}$.

En **Åben mængde** er en mængde, der ikke indeholder nogle af sine randpunkter.

En **afsluttet mængde** indeholder alle sine randpunkter.

Eksempel 1 (En åben og afsluttet mængde)**.** *Mængden $\mathcal{M} = \mathbb{R}^7$ er både åben og afsluttet. Den er åben, fordi den ikke har nogen rand, således, at $\partial\mathcal{M} = \emptyset$. Men da den tomme mængde er indeholdt i $\mathcal{M}$ (Husk: den tomme mængde er indeholdt i alle mængder!) er alle randpunkter indeholdt i $\mathcal{M}$. Det følger heraf, at $\mathcal{M}$ både er åben og afsluttet.*

Eksempel 2 (En afsluttet mængde)**.** *Her er et ekspempel på en afsluttet mængde:*

$$\left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 9\right\}. \tag{1}$$

Eksempel 3. *Mængden,*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 3 \text{ og } 2 \leq y \leq 3\}, \tag{2}$$

er hverken åben eller afsluttet, thi nogle randpunkter er med i mængden, og andre randpunkter ikke er med i mængden.

Eksempel 4 (En afsluttet mængde)**.** *Mængden,*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ og } 2 \leq y \leq 3\}, \tag{3}$$

er afsluttet.

En mængde er **begrænset**, hvis der findes en kugle, som indeholder hele mængden.

En mængde er **ubegrænset**, hvis der ikke findes en kugle, der kan indeholde hele mængden.

Et punkt, $\overline{a} \in \mathcal{A}$, er **isoleret**, hvis der ikke findes andre punkter i $\mathcal{A}$, der er vilkårligt tæt på $\overline{a}$.

Et punkt, $\overline{a}$, er et **akkumulationspunkt**, hvis $\overline{a}$ ligger i $\overline{\mathcal{A}}$ og ikke er et isoleret punkt.

Kontinuitet og differentiabilitet

Definition 2. *En funktion, f, er kontinuert i punktet $\overline{a} \in D_f$, hvis dette er et isoleret punkt for D_f eller, at følgende gælder:*

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a}) \tag{4}$$

Hvis en funktion er kontinuert i hele sin definitionsmængde siges, at funktionen er kontinuert.

Sætning 1. *Hvis funktionerne f og g er kontinuerte i $\overline{a}$, så er funktionerne $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ og $\frac{f}{g}$ (Forudsat at $g(\overline{a}) \neq 0$) også kontinuerte i $\overline{a}$.*

Sætning 2. *Hvis f er kontinuert i $\overline{a}$ og g er kontinuert i $f(\overline{a})$, så er $g \circ f$ også kontinuert i $\overline{a}$.*

Sætning 3. *En C^1 funktion defineret på et åbent interval $\mathcal{A}$ i $\mathbb{R}^n$ er kontinuert på $\mathcal{A}$.*

Sætning 4 (Ekstremalværdisætningen)**.** *Lad $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ være en afsluttet begrænset mængde, og antag at $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$. Da har f et maksimum og et minimum.*

Det skal bemærkes, at ekstremalværdisætningen ikke udelukker, at f kan have flere max- og min-steder.

Definition 3 (Retningsafledet)**.** *Antag at funktionen $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ er defineret på en delmængde $\mathcal{A}$ af $\mathbb{R}^n$ og at $\overline{a}$ er et indre punkt i $\mathcal{A}$. Lad endvidere $\overline{r}$ være en vektor. Da er den retningsafledede i punktet $\overline{a}$ i retningen $\overline{r}$ defineret ved:*

$$f'(\overline{a}; \overline{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{a} + h\overline{r}) - f(\overline{a})}{h} \tag{5}$$

Eksempel 5 (Retningsafledet)**.** *I dette eksempel vil vi finde den retningsafledede for funktionen,* $f(x, y) = x^2 + xy$*, i retningen* $\overline{r} = (2, 1)$ *i punktet* $\overline{a} = (1, 0)$*. Først ses, at*

$$\overline{a} + h\overline{r} = (1, 0) + h \cdot (2, 1) = (1 + 2h, h) \tag{6}$$

Heraf følger for $f(\overline{a} + h\overline{r})$*:*

$$f(\overline{a} + h\overline{r}) = (1 + 2h)^2 + (1 + 2h)h = 6h^2 + 5h + 1. \tag{7}$$

I øvrigt har vi, at $f(\overline{a}) = 1$*. Dette giver for den retningsafledede:*

$$f'(\overline{a}; \overline{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{(6h^2 + 5h + 1) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} 6h + 5 = 5. \tag{8}$$

Den retningsafledede er således 5 for den givne retningsvektor.

Definition 4 (Partielt afledet)**.** *Lad* $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *være en funktion af* n *variable og lad* $\overline{a}$ *være et indre punkt i* $\mathcal{A}$*. Den* i*'e partielt afledte -* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$ *- er da den retningsafledte af* f *i retning af den* i*'e enhedsvektor. Dvs.,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) = f'(\overline{a}; \overline{e_i}). \tag{9}$$

Det er her forudsat, at denne eksisterer.

Definition 5 (C^1-funktion)**.** *En funktion er* C^1*, hvis de partielt afledede eksisterer og er kontinuerte.*

Sætning 5. *En* C^1*-funktion defineret på en åben mængde* $\mathcal{A}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *er kontinuert på* $\mathcal{A}$*.*

Definition 6. *Gradienten til en funktion* f *af* n *variable i et indre punkt* $\overline{a}$ *i definitionsmængden er vektoren:*

$$\nabla f(\overline{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a}) \right) \tag{10}$$

Sætning 6 (Sammenhæng mellem gradient og retningsafledet)**.** *Hvis* f *er* C^1*, eksisterer den retningsafledede og er givet ved*

$$f'(\overline{a}; \overline{r}) = \nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{r}$$

Sætning 7 (Geometrisk tolkning af gradienten)**.** *Hvis* f *er* C^1 *og* $\overline{a}$ *er et indre punkt i definitionsmængden peger gradienten* $\nabla f(\overline{a})$ *i den retning, hvor* f *vokser hurtigst væk fra* $\overline{a}$

Bevis. Lad $\overline{u}$ være en enhedsvektor og indse, at f vokser hurtigst i den retning $\overline{u}$, hvor $f'(\overline{a}; \overline{u})$ er størst. Ved anvendelse af sætning 6 fås, at

$$|f'(\overline{a}; \overline{u})| = |\nabla f(\overline{a}) \cdot \overline{u}| = |\nabla f(\overline{a})| \cdot |\overline{u}| |\cos \theta|, \tag{11}$$

hvor θ er vinklen mellem de to vektorer. Når de to vektorer peger i samme retning er $\cos \theta = 1$, og det er hermed bevist, at den retningsaflede er størst, når gradienten og enhedsvektoren peger i samme retning. □

Tangentplaner og differentiabilitet

En *affin funktion* er pr. definition givet ved,

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + d.$$

Hvis $d = 0$ kaldes det desuden en *lineær funktion.*

Definition 7. *Antag at f er en funktion defineret på $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ og $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ er en affin funktion. Vi siger, at h tangerer f i $\overline{a} \in \mathcal{A}$ hvis*

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{a}} \frac{f(\overline{x}) - h(\overline{x})}{|\overline{x} - \overline{a}|} = 0. \tag{12}$$

Sætning 8. *Antag at f er C^1 og $\overline{a}$ er et indre punkt i D_f. Da er tangenthyperplanen til f i $\overline{a}$ entydig og er givet ved grafen til funktionen,*

$$h(\overline{x}) = f(\overline{a}) + \nabla f(\overline{a}) \cdot (\overline{x} - \overline{a}). \tag{13}$$

Definition 8 (Definition af differentiabilitet)**.** *En funktion f er differentiabel i $\overline{a}$, hvis der findes en entydig tangenthyperplan h til f i $\overline{a}$.*

Ved at kombinere denne definition med sætning 8 fås, at alle C^1-funktioner er differentiable.

Kædereglen

Sætning 9 (Kædereglen)**.** *Lad $f(u_1, \ldots, u_m)$ være en C^1-funktion af m variable defineret på et åbent interval og lad $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)$ være m C^1-funktioner af n variable med åbne definitionsmængder. Da er den sammensatte funktion,*

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)), \tag{14}$$

en C^1-funktion. Hvis h er defineret i $\overline{a}$ og $\overline{b} = (g_1(\overline{a}), \ldots, g_m(\overline{a}))$ så er

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\overline{a}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\overline{b}) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\overline{a}) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(\overline{b}) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\overline{a}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\overline{b}) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\overline{a}).$$

Eksempel 6. *Lad $f(u, v, w)$ være C^1 og lad $g(x, y)$, $h(x, y)$ og $k(x, y)$ være C^1. Hvis vi sætter,*

$$\phi(x, y) = f(g(x, y), h(x, y), k(x, y)), \tag{15}$$

så er

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial k}{\partial y}. \tag{16}$$

Eksempel 7. *Betragt funktionerne*

$$f(u,v) = uv^2, \quad g(x,y,z) = x + z + 2yz, \quad h(x,y,z) = x^2yz. \tag{17}$$

For den sammensatte funktion, $k(x,y,z) = f(g(x,y,z), h(x,y,z))$ *gælder:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial x} && (18)\\
&= v^2 \cdot 1 + 2uv \cdot 2xyz && (19)\\
&= v^2 + 4uvxyz && (20)\\
&= (x^2yz)^2 + 4(x + z + 2yz)(x^2yz)xyz && (21)\\
&= x^4y^2z^2 + 4(x^3yz + x^2z^2y + 2x^2y^2z^2)xyz && (22)\\
&= x^4y^2z^2 + 4(x^4y^2z^2 + x^3z^3y^2 + 2x^3y^3z^3) && (23)\\
&= x^4y^2z^2 + 4x^4y^2z^2 + 4x^3z^3y^2 + 8x^3y^3z^3 && (24)\\
&= 5x^4y^2z^2 + 4x^3z^3y^2 + 8x^3y^3z^3 && (25)
\end{aligned}$$

Niveauflader, gradient og tangentplan

En niveaukurve til en funktion $f(x,y)$ er løsningsmængden til,

$$f(x,y) = c, \tag{26}$$

hvor c er en konstant.

Hvis vi har et punkt (a,b), hvor $f(a,b) = c$, er (a,b) indeholdt i niveaukurven, (26). Det kan vises, at tangentlinjen til niveaukurven i (a,b) er givet ved

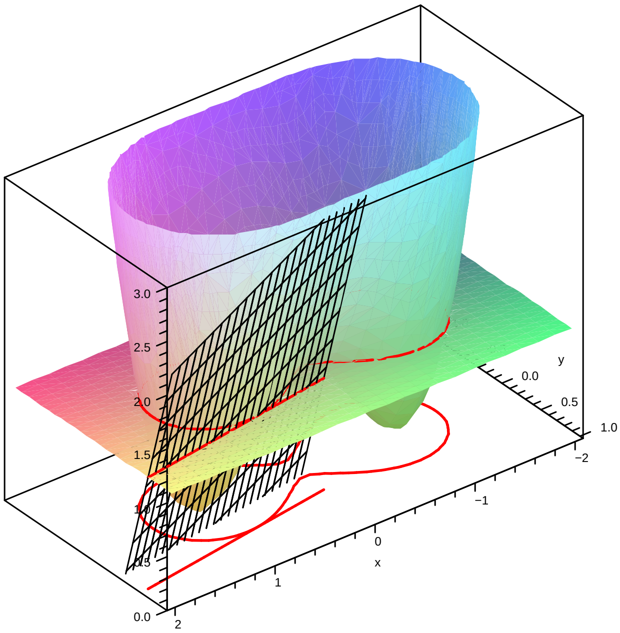
$$\nabla f(a,b) \cdot ((x,y) - (a,b)) = 0. \tag{27}$$

Det er således en linje gennem (a,b) med normalvektor $\nabla f(a,b)$.

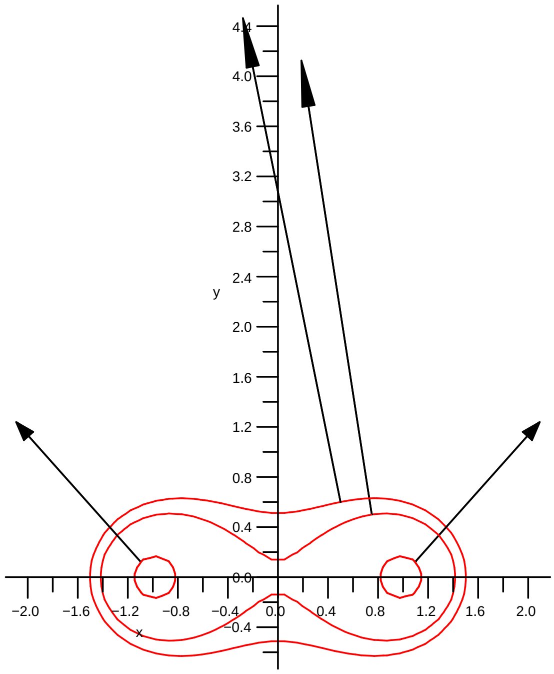
På figur 1 ses et eksempel på en funktion, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, hvor tangentplanen til grafen er fundet i et punkt $(x,y,f(x,y))$. På grafen ses sammenhængen mellem niveaukurve, graf, grafens tangentplan og niveaukurvens tangentlinje.

På figur 2 ses, et plot af nogle niveaukurver for den samme funktion, som var på figur 1. På niveaukurverne er gradienten desuden indtegnet i nogle punkter. På figuren ses det således, at gradienten har den vigtige egenskab, at den står vinkelret på tangentlinjen til et punkt på niveaukurven. At dette er tilfældet følger direkte af, at gradienten er normalvektor til tangentlinjen.

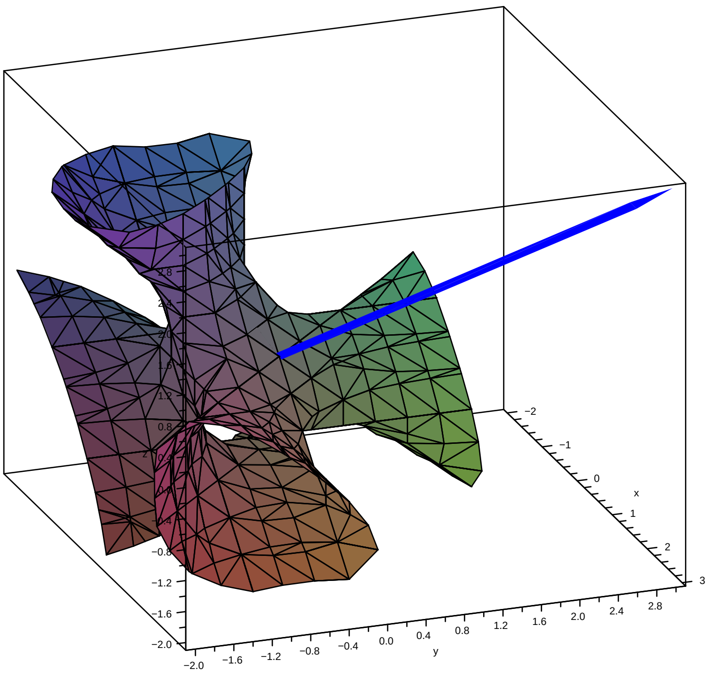
På figur 3 ses en niveauflade for en funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. På niveaufladen er gradienten indtegnet i et punkt. Hvis man havde indtegnet en tangentplan til det givne punkt på niveaufladen, ville man se, at gradientvektoren var normalvektor til denne tangentplan.



Figur 1: Denne figur viser grafen for en funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, hvor tangentplanen i et punkt er indtegnet. Desuden er der også indtegnet en niveauflade og tangenten til nivaeufladen.



Figur 2: Denne figur viser niveaukurver for den samme funktion, som ses på figur 1. I nogle punkter er der desuden indtegnet gradienter.



Figur 3: Denne figur viser en niveauflade for en funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Desuden er gradienten også indtegnet i et punkt.