

Førsteårsprojekt

– Strukturen af mørkt stof

Lavet af Esben Pape Selsing, Martin Sparre og Kristoffer Stensbo-Smidt.

Vejledere: Steen Hansen og Ole Høst (begge fra Dark Cosmology Centre).

Afleveringsdato: 26. marts 2007

Indhold

1	Introduktion	3
2	Bestemmelse af centrum	4
2.1	Korrektion for volumenforskelle	4
2.2	Endelig bestemmelse af centrum	5
2.3	Præcision	5
3	Massefordeling	7
3.1	Korrektion for volumenforskelle	7
3.2	Massetæthed	7
3.3	Fastsættelse af strukturens grænser	8
4	Hastighedsfordeling	9
4.1	Transformation af hastigheder	9
4.2	Hastighedsfordelinger	9
4.3	Spredning af hastigheder	10
4.4	Teoretisk model for temperaturen	12
4.5	Sammenligning af spredninger	12
4.6	Faserumstæthed	13
5	Afslutning	15
A	Yderligere plots	16
B	Udregning af $\Phi(r)$	17

1 Introduktion

Denne opgaves formål er at beskrive strukturen af mørkt stof. Opgaven bygger på en simulering af sådanne partikler, det vil sige partikler, der udelukkende vekselvirker gennem deres tyngdekraft. Selve simuleringen er meget stor så for at gøre opgaven overkommelig, er kun en lille del af simuleringens partikler benyttet. Mere præcist udgør disse partikler en form for hob, som vil danne grundlag for de følgende kapitler. Denne hob svarer stort set til strukturen af mørkt stof i vores egen galakse, Mælkevejen. Fx har de begge en omtrentlig masse på 10^{12} solmasser. Hoben er i ligevægt, dvs. dens tilstand ændrer sig ikke i tid, og man kan således betragte generelle egenskaber for mørkt stof ved sammenligning med termodynamikken. Selve simuleringen er ikke perfekt, og der vil derfor forekomme systematiske fejl ved meget store koncentrationer af partikler.

Datafilen, som vi har fået udleveret, indeholder masse, (x, y, z) -positioner, hastigheder og potentialer for partiklerne. De har alle samme masse, hvilket senere vil lette en del udregninger. Simuleringen bruger ikke SI-enheder, og da enhederne ikke er opgivet, vil de ikke blive benyttet.

Indledningsvis skal centrum af denne struktur af mørkt stof bestemmes for senere at kunne se nærmere på massefordelingen. Herefter vil vi kigge på hastighedsfordelingen af strukturens partikler for derefter at drage en parallel til temperaturen. Til slut betragtes den såkaldte faserumstæthed.

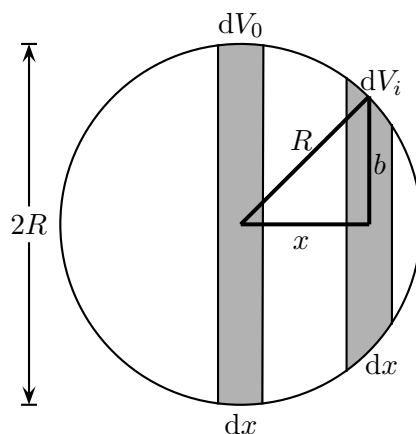
2 Bestemmelse af centrum

Som det første er det nødvendigt at lokalisere centrum af strukturen. Dette skyldes, at de efterfølgende plots vil tage udgangspunkt i afstanden til dette centrum, hvilket vil gøre beregningerne uafhængige af det givne koordinatsystem.

I praksis gøres dette ved at lave histogrammer over antallet af partikler i x -, y - og z -retningerne, hvilket vil gøre det muligt at bestemme centrum af strukturen.

2.1 Korrektion for volumenforskelle

Partiklerne er skåret ud af simuleringen som en ellipsoide¹, som tilnærmelsesvis er kugleformet. Dette betyder, at en opdeling af partiklerne i eksempelvis x -retningen vil medføre, at størrelsen af de yderste inddelinger vil være betydeligt mindre end de inderste, hvilket ses på figur 1.



Figur 1

For at finde en faktor at korrigere for dette med betragtes det infinitesimale volumen dV_0 af det midterste udsnit af kuglen:

$$dV_0 = \pi R^2 \cdot dx,$$

hvor dx er søjlebredden og R er radius. Ved at udnytte Pythagoras på den retvinklede trekant, fås det infinitesimale volumen dV_i af det i 'te udsnit:

$$dV_i = \pi b^2 \cdot dx = \pi(R^2 - x^2)dx.$$

Nu kan forholdet mellem disse beregnes:

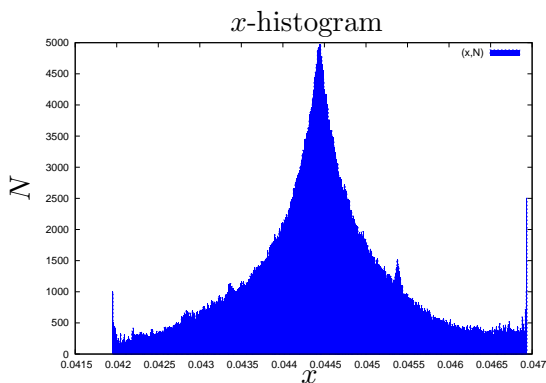
$$\gamma \equiv \frac{dV_0}{dV_i} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}.$$

For at korrigere skal faktoren γ derfor multipliceres på søjleværdierne.

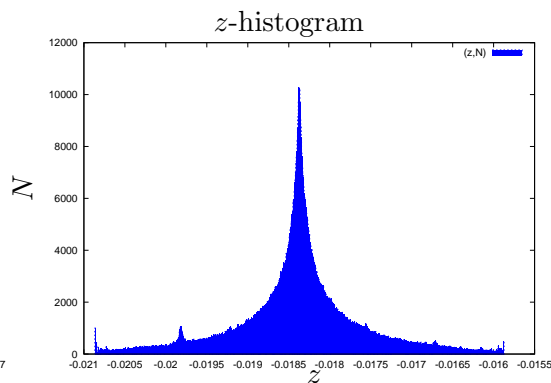
¹En ellipsoide er en "elliptisk" kugle.

2.2 Endelig bestemmelse af centrum

Efter at have volumenkorregeret kan strukturens centrum bestemmes ved at lave histogrammer over de tre akser og derefter aflæse, hvor det største antal partikler er. På figur 2 og 3 ses histogrammer over partikelfordelingen i henholdsvis x - og z -retningen. Ud fra disse plots bestemmes centrum med 4 betydende cifres nøjagtighed ved at zoome ind på toppen og derefter aflæse den pågældende koordinat. I appendiks A ses desuden histogrammet over y -aksen. Koordinatsættet til centrum bestemmes nu til $(0.04444, -0.03724, -0.01837)$, hvor vi vurderer usikkerheden til at være 0.000005 for alle målinger.



Figur 2



Figur 3

Det kan bemærkes, at der på begge de viste histogrammer ses endnu en top udover centrum af hovedstrukturen. Denne top er sandsynligvis en indfanget struktur, der kan svare til en satellit-galakse. De yderste histogramsøjler er desuden forhøjede, hvilket skyldes vores korrektionsmetode, der gør, at der her er blevet divideret med et meget lille tal.

2.3 Præcision

Det er klart, at der er usikkerhed i forbindelse med denne metode til bestemmelse af centrum. Af gode grunde kan centrum ikke aflæses mere præcist end bredden af histogramsøjlerne selv. For mange histogramsøjler vil gøre det svært overhovedet at aflæse hvor centrum er, fordi der så vil være for stor variation i højden af hver enkelt søjle omkring vores midtpunkt. Modsat vil færre antal histogramsøjler gøre det for upræcist. I dette tilfælde er der brugt 1000 søjler, hvilket giver følgende søjlebredder:

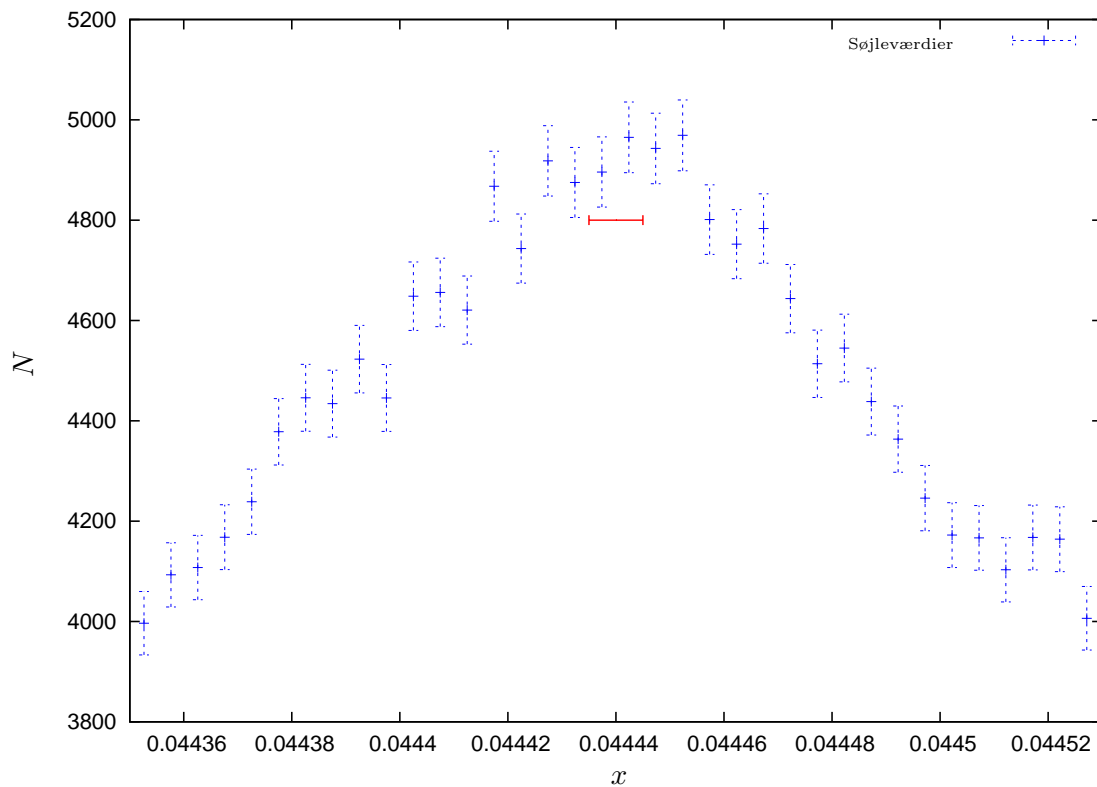
$$\Delta x = 4.986 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta y = 4.988 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta z = 4.992 \cdot 10^{-6}.$$

Sammenlignes vores fundne værdi for centrum med positionen af den partikel med mindst potential (denne er bestemt til $(0.04444, -0.03725, -0.01837)$), stemmer dette overens til og med fjerde betydende ciffer². For at kontrollere præcisionen af centrum har vi defineret

²Det skal bemærkes, at alle partikler har det samme første betydende ciffer

en kugle med samme radius som afstanden fra vores centrum til partiklen med lavest potential. Ved at placere denne kugle i centrum og tælle antallet af partikler i den fås, at den indeholder 146 mod ca. $7 \cdot 10^5$ i hele strukturen, hvilket indikerer, at vores centrumbestemmelse har en rimelig præcision.

På figur 4 ses toppen af x -histogrammet, hvor usikkerhederne af søjleværdierne er indtegnet.



Figur 4: På plottet ses toppen af x -histogrammet, hvor den røde streg angiver det bestemte centrum med den dertil hørende usikkerhed.

3 Massefordeling

I dette kapitel betragtes en mere generel fordeling af masse i strukturen. I sidste afsnit blev der taget udgangspunkt i x -, y - og z -koordinater, men fremover vil der blive taget udgangspunkt i afstanden fra strukturens centrum. Der vil blive plottet tætheden af partikler som funktion af radius og for at fremhæve de fysiske detaljer omkring centrum, vil strukturen blive opdelt i histogramsøjler på en måde, så der opnås histogrammer med logaritmisk førsteakse. I praksis betyder dette, at strukturen bliver delt op i kugleskaller, hvor logaritmen til forholdet mellem indre og ydre radius er konstant. Dette medfører, at volumenerne af skallerne bliver forskellige.

Det er her antaget, at strukturen er kuglesymmetrisk. Dette er dog ikke helt tilfældet, hvilket blandt andet ses på de tidligere histogrammer, og dette vil senere give anledning til mindre fejlkilder.

3.1 Korrektion for volumenforskelle

For at korrigere for disse volumenforskelle betragtes rumfanget af den i 'te kugleskal:

$$V_i = \frac{4}{3}\pi r_i^3 - \frac{4}{3}\pi r_{i-1}^3.$$

Her angiver r_i den ydre radius af den i 'te kugleskal og V_i angiver voluminet af den givne kugleskal. Forholdet mellem den yderste og den i 'te kugleskal er da

$$\frac{V_y}{V_i} = \frac{r_y^3 - r_{y-1}^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3}, \quad (3.1)$$

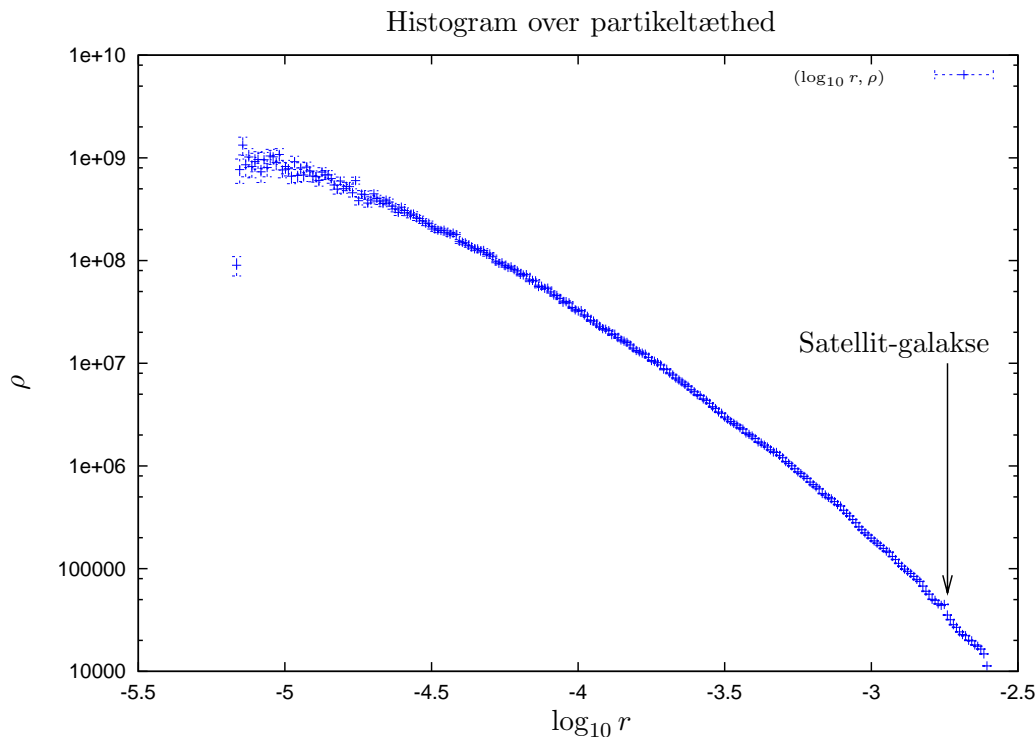
hvor y betegner den yderste kugleskal.

Da det er den logaritmiske afstand, der indgår på førsteaksen i histogrammerne, skal disse selvfølgelig omregnes til virkelige afstande. Når antallet af partikler i hver kugleskal er fundet, vil hvert antal blive multipliceret med faktoren (3.1).

3.2 Massetæthed

Nu da centrum for strukturen er blevet bestemt, kan massetætheden som funktion af radius plottes. På figur 5 ses et plot af dette med logaritmisk førsteakse.

Umiddelbart lægger man mærke til, at der er store variationer i søjleværdien på den inderste del af histogrammet (dvs. for søjler, der er til venstre for -4.5). Dette skyldes, at korrektionsmetoden, som blev beskrevet i afsnit 3.1, giver en stor relativ usikkerhed for de inderste søjler, idet korrektionsfaktoren bliver stor, og en eventuel usikkerhed vil blive forstørret væsentligt.



Figur 5

3.3 Fastsættelse af strukturens grænser

Fremover vil det være nødvendigt at have fastsat en ydre grænse for strukturen, da det er vigtigt ikke at medtage partikler uden for denne, idet disse ikke er i ligevægt. I praksis er dette ikke så let, da vi ikke kender nogen klar grænse for, hvad der er struktur, og hvad der er “baggrundsstøj”. Når man normalt arbejder med strukturer, som vores, er der en klar definition af, hvad den ydre grænse er. Denne defineres som grænsen mellem partikler i ligevægt og partikler, som stadig er på vej ind i strukturen, men da denne er for avanceret på nuværende tidspunkt, er vi nødt til at give et kvalificeret skøn over, hvor den givne grænse indtræder; dvs. hvor baggrundsstøjen endnu ikke giver for store fejlkilder. Omvendt skal vi også passe på ikke at skære for meget af strukturen væk, da vi ikke ønsker at bortkaste brugbare data.

Ud fra figur 5 har vi valgt at sætte den ydre grænse for strukturen ved den logaritmiske afstand -2.85 . Dette har vi først og fremmest gjort, fordi der på plottet ses en satellitgalakse, som ikke er i ligevægt og derfor ville influere på fremtidige plots.

Det er en smule overraskende, at partikeltætheden ikke flader ud og bliver konstant, når r bliver stor. Dette kunne man forvente, da den burde blive konstant uden for strukturen. Dette kan skyldes, at vores datasæt ikke indeholder partikler helt uden for strukturen.

4 Hastighedsfordeling

I de foregående afsnit er fordelingen af partikler i strukturen blevet analyseret, og det er nu muligt at undersøge diverse egenskaber for deres hastigheder.

I simuleringen betragtes strukturen fra et inertialsystem, som ikke er massecenterets (CM). Da det fremover er nødvendigt at benytte partiklernes hastigheder med hensyn til CM-systemet, skal disse af gode grunde transformeres.

4.1 Transformation af hastigheder

Da vi har fået oplyst, at vores hastigheder – ligesom i vores egen galakse – er i omegnen af $200 - 300 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, og dermed er ikke-relativistiske, kan vi nøjes med at lave den sædvanlige galilei-transformation.

Hastigheden af CM beregnes ved at addere alle partiklernes hastigheder i hver af de tre retninger og derefter dividere med antallet af partikler. Dette giver så direkte CM's hastighed, da alle partiklerne har samme masse. Herefter kan de transformerede hastigheder beregnes ved galilei-transformationen,

$$\mathbf{v}_{\text{transformeret}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{CM}}.$$

4.2 Hastighedsfordelinger

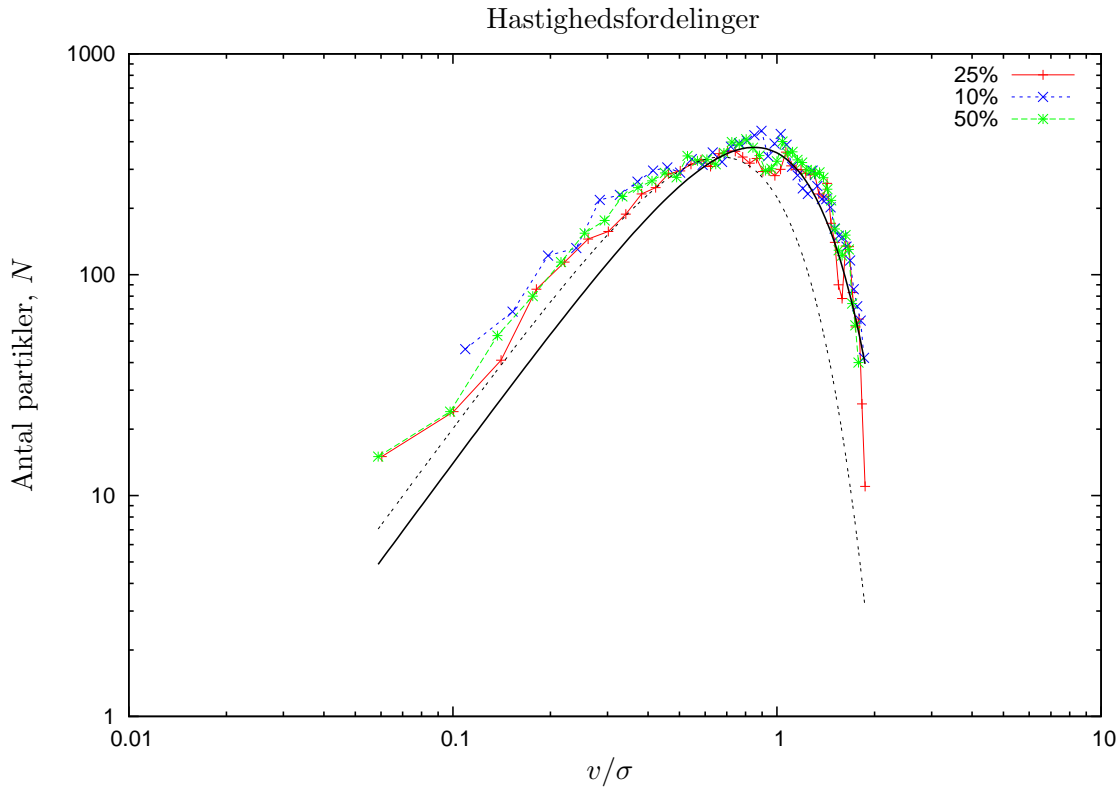
Som det første undersøges hastighedsfordelingerne af partiklerne tre forskellige steder i strukturen:

Område (Andel af radius)	Antal partikler (ca.)
10 %	5000
25 %	10000
50 %	10000

Plottes hastighedsfordelingen af partiklerne vil man umiddelbart se, at dette kunne ligne Maxwell-fordelingen for en idealgas. Denne kan skrives på formen

$$f(v) = k_1 v^2 e^{-k_2 v^2}, \quad (4.1)$$

hvor v er farten og k 'erne er konstanter. For at undersøge om fordelingen beskriver vores data, plottes hastighedsfordelingerne for de forskellige områder af strukturen, hvilket ses på figur 6. Den ikke-stiplede sorte kurve viser et fit af alle punkterne. Denne approksimerer den faktiske fordeling godt, men ved små førstekoordinater er der markante afvigelser. Den stiplede sorte kurve er et fit af punkter i intervallet $r \in [0.0005; 0.9]$. Disse kurver viser, at der er klare afvigelser mellem (4.1) og den faktiske fordeling af partiklerne, hvilket er i overensstemmelse med [SH].



Figur 6

4.3 Spredning af hastigheder

En måde at beskrive temperaturen af strukturen på er at betragte spredningen σ^2 af partiklernes hastigheder. Dette kan indses ved at sammenligne normalfordelingen i sfæriske koordinater og Maxwell-fordelingen:

$$f(r) = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{3/2} r^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad (\text{Normalfordeling})$$

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right). \quad (\text{Maxwell})$$

Eftersom massen m er konstant i vores tilfælde, må σ^2 og T have samme rolle i eksponenten, og dermed vil begge være et udtryk for hvor meget energi, der er i strukturen, hvilket retfærdiggør vores analogi.

For at beskrive spredningen opdeles strukturen igen i logaritmiske histogramsøjler, hvor der i hver søjle udregnes en værdi for σ^2 således:

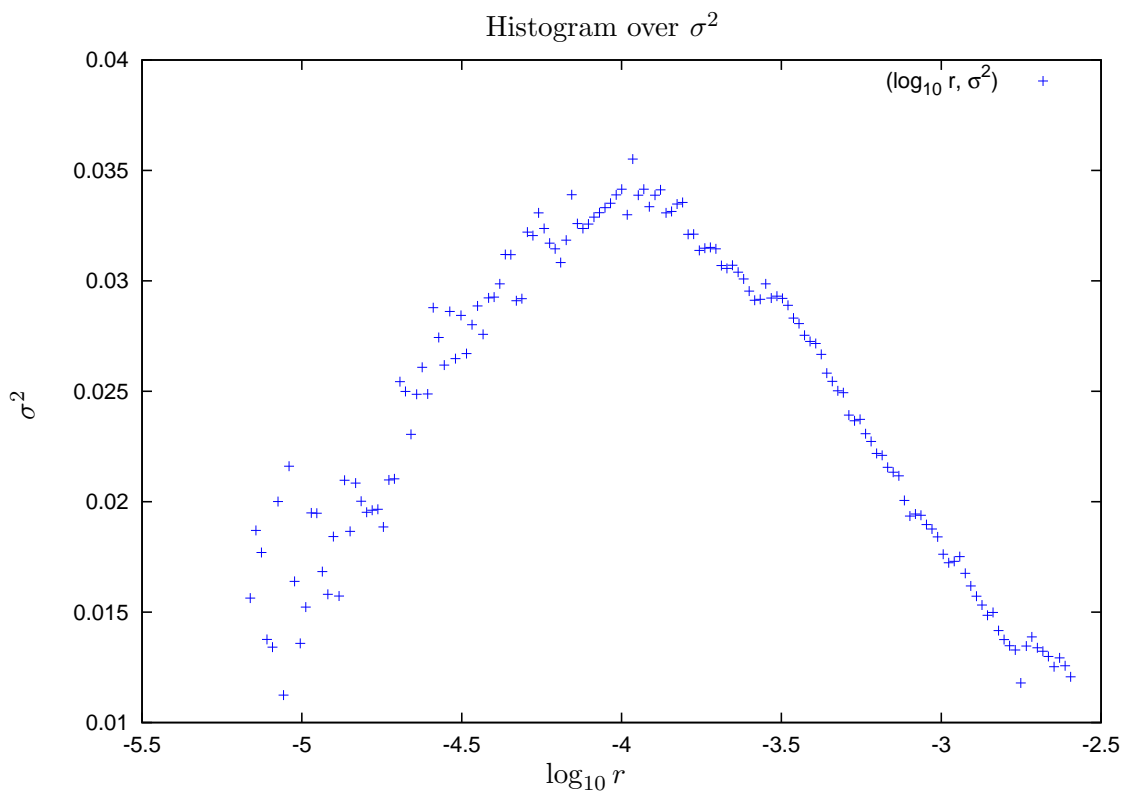
$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_i v_i^2,$$

hvor N er antallet af partikler i den pågældende histogramsøjle, og v_i er farten af den i 'te partikel i søjlen. På figur 7 ses et enkeltlogaritmisk plot af (r, σ^2) . Det ses nu, at σ^2

– og dermed også temperaturen – varierer som funktion af radius. For en almindelig gas i ligevægt gælder der, at temperaturen vil være konstant overalt i det givne system.

Da vores eget system er i ligevægt, kan det dermed konkluderes, at strukturen stærkt afviger fra det, man kunne forvente ud fra termodynamikken. Dette resultat er ikke særligt overraskende, da partiklerne i simuleringen har en masse, som er betydeligt større end i en almindelig gas, og de vil derfor vekselvirke gravitationelt. I de sædvanlige termodynamiske resultater antages nemlig, at der ikke optræder vekselvirkning over afstand.

På plottet ses, at punkterne i den venstre del af histogrammet fluktuerer betydeligt. Dette skyldes, at der ikke er så mange partikler helt tæt på centrum, hvilket giver statistiske usikkerheder. Endvidere er det vigtigt at huske på, at der i samme område er numeriske fejl i simleringen. Selvom man skærer de partikler, som befinder sig i en afstand under $10^{-4.5}$, væk fra histogrammet, ville man stadig kunne konkludere det samme; dvs. at σ^2 – og dermed også temperaturen ifølge vores analogi – varierer.



Figur 7

4.4 Teoretisk model for temperaturen

Efter at have beregnet σ^2 som funktion af radius for hele strukturen vil vi nu lave en teoretisk model for det samme for yderligere at kunne beskrive den ud fra den fysik, vi kender. For strukturen er der ligevægt mellem dens egen tyngdekraft og det tryk P , som udvider strukturen. For en almindelig gassky i hydrostatisk ligevægt³ kan dette udtrykkes som

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2},$$

hvor $M(r)$ er den kumulative masse, dvs. den totale masse inden for den givne radius, og $\rho(r)$ angiver massetætheden i den givne afstand. For en idealgas gælder, at $P \propto nT$, hvor n er antalstætheden af partikler (således at $\rho = mn$), og T er temperaturen. I analogien mellem σ^2 og T kan vi sige, at $P \propto \rho\sigma^2$. Vi antager, at dette gælder for vores partikler. Indsættes udtrykket for P fås følgende løsning til differentiaalligningen

$$\int d(\rho\sigma^2) \propto \int -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2} dr.$$

Vi er interesserede i at finde et udtryk for σ^2 som funktion af r . Der må gælde, at når man nærmer sig strukturens udkant, nærmer temperaturen sig 0 (dette ses også på figur 7). I afstanden r er σ^2 således

$$\sigma^2(r) = \sigma^2(r) - \sigma^2(r_{\text{ydre}}) = \int_{r_{\text{ydre}}}^r d\sigma^2$$

Ved at bruge dette udtryk fås nu endeligt:

$$\sigma^2 \propto \frac{1}{\rho(r)} \int_r^{r_{\text{ydre}}} G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2} dr \equiv \Phi(r)$$

For senere at plotte denne omskrives integralet til en sum. Læs evt. mere om dette i appendiks B.

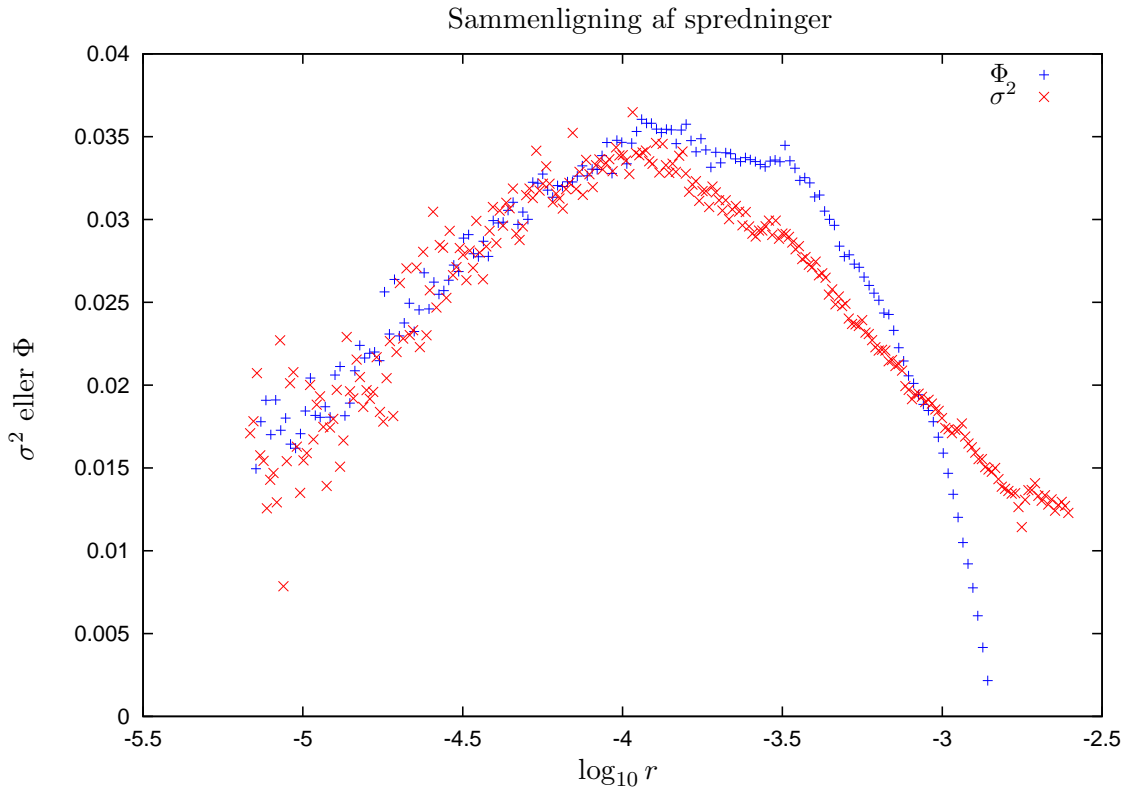
4.5 Sammenligning af spredninger

Efter at have beregnet σ^2 og fundet et teoretisk udtryk for denne, kan vi lave en sammenligning af disse.

På figur 8 ses både $\Phi(r)$ og $\sigma^2(r)$, som vi bestemte i afsnit 4.3. For at kunne sammenligne dem er $\Phi(r)$ blevet multipliceret med en konstant, så funktionsværdierne er af samme størrelsesorden.

Det er tydeligt, at de to kurver har træk til fælles. De følges ad i starten, og knækker begge omkring -4.0 samt omkring -3.5 . Derimod afviger deres hældninger efter -4.0 , hvilket viser, at de indledende antagelser i afsnit 4.4 ikke er korrekte, men kan bruges til en approksimativ beskrivelse af strukturen.

³Hydrostatisk ligevægt er når kræfterne fra det udadrettede tryk og systemets egen tyngdekraft ophæver hinanden.



Figur 8

4.6 Faserumstæthed

Det antages ofte, at følgende potenslov gælder:

$$\frac{\rho}{\sigma^\epsilon} \propto r^{-\beta}, \quad (4.2)$$

hvor ϵ og β er konstanter. Taylor og Navarro [TN] fandt $\epsilon = 3$ og $\beta = 1.875$. Vi vil her undersøge rigtigheden af dette ved at plotte $(r, \rho/\sigma^3)$ i et dobbeltlogaritmisk koordinat-system og bestemme den bedste værdi for β , hvilket er gjort på figur 9. Her har vi bestemt $\beta = 1.91 \pm 0.03$, hvor vi antager, at $\epsilon = 3$. Da vi lavede regressionen fittede vi på intervallet $[-4.5; -2.85]$, hvor den mindste grænse er valgt, så usikkerhederne og fejlkilderne tæt ved centrum ikke regnes med. En lille ændring af disse grænser medfører ændringer af β , og ud fra disse har vi angivet usikkerheden. Det skal bemærkes, at vores værdi stemmer overens med, hvad der blev fundet i [TN] inden for den angivne usikkerhed. I [DM] er beskrevet, at værdier i intervallet $[1.85; 1.95]$ er i overensstemmelse med empiriske værdier.

For at se nærmere på hvorvidt der rent faktisk gælder en potenslov laves et residualplot. Dette ses også på figur 9 og viser forskellene mellem punkterne og den fittede funktion. Det ses, at der er en klar systematik i afvigelserne, hvilket viser, at en potenslov ikke beskriver strukturen perfekt, da punkterne ikke ligger på en ret linje i det dobbeltlogaritmiske koordinatsystem. De store afvigelser ved lave radier ses igen tydeligt. Desuden ses der også

store afvigelser ved store radier, hvilket sandsynligvis skyldes, at baggrundsstøjen influerer for meget.

Fysikken bag ρ/σ^3 er endnu ikke kendt, og hvorfor denne størrelse er tilnærmelsesvis proportional med $r^{-\beta}$ er også uvist. De teoretiske modeller bygger ofte på denne potenslov, men er stadig – som vist ovenfor – kun en tilnærmelse.



Figur 9

5 Afslutning

Centrum af strukturen er blevet bestemt, og usikkerheden på denne er blevet anslået til at være lille. Herefter er grænsen mellem struktur og baggrundsstøj blevet bestemt.

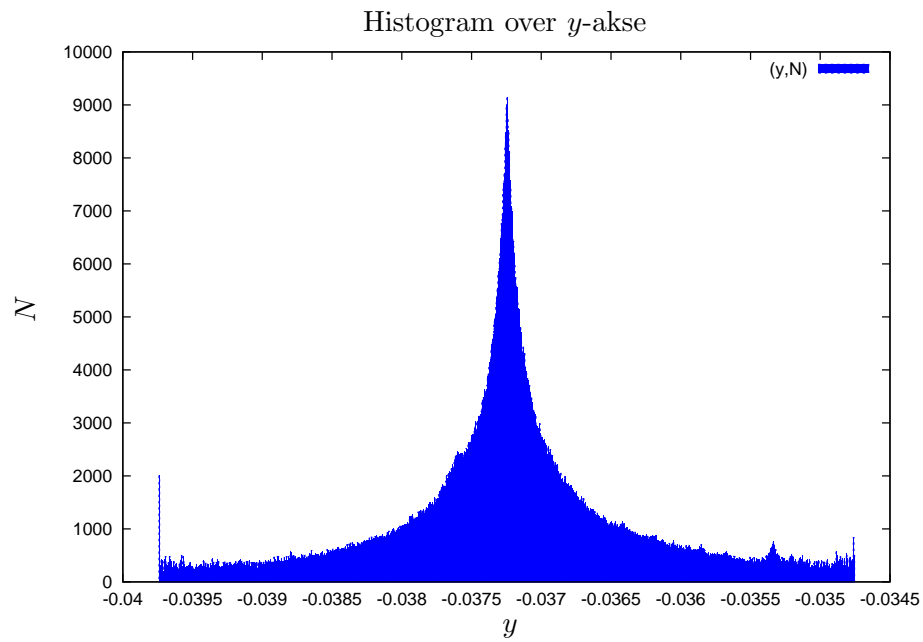
Herefter er det vist, at partiklernes hastighedsfordeling ikke kan beskrives ud fra Maxwell-fordelingen, hvilket også var forventeligt.

Vi har dernæst undersøgt spredningen af partiklernes hastigheder og vist, at denne varierer med afstanden. Da spredningen kan identificeres med temperaturen, medfører det, at strukturen ikke kan beskrives som en idealgas. Der er dog visse ligheder, hvilket ses ud fra en teoretisk model, der bygger på idealgasloven, for spredningen.

Vi har som det sidste undersøgt faserumstætheden og fundet et resultat, der stemmer overens med de nyeste simuleringer.

A Yderligere plots

Her ses histogrammet over y -aksen:



Figur 10

B Udregning af $\Phi(r)$

I det program, som benyttes til alle udregninger, udregnes ρ og den kumulative masse M i hver søjle i histogrammet. Søjle-nummeret betegnes med i og løber fra 0 til antallet af søjler, N , minus 1. Φ som funktion af søjle-nummeret i kan nu skrives som:

$$\Phi(i) = \frac{1}{\rho(i)} \sum_{j=i}^{N-1} \frac{M(j)\rho(j)}{r_j^2} \cdot \Delta x(j),$$

hvor $\Delta x(j)$ er den ikke-logaritmiske bredde af den j 'te søjle og r_j er middelværdien af den ikke-logaritmiske afstand til den j 'te søjle.

Litteratur

[TN] Taylor & Navarro: Taylor J E, Navarro J F, 2001, ApJ, 563, 483

[DM] Walter Dehnen & Dean E. McLaughlin
Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 363 (2005) 1057-1068
astro-ph/0506528 v1 22 Jun 2005

[SH] Steen H Hansen et al 2006 J. Cosmol. Astropart. Phys. JCAP01(2006)014