

Større Skriftlig Opgave

– Den specielle relativitetsteori

Martin Sparre, 03u24
December 2005

Elev: Martin Sparre
Klasse: 3.u
Elev Nr.: 03u24
Institution: Frederiksborg Gymnasium
Vejleder: Lasse Storr-Hansen
Fag: Fysik
Dato: 21. december 2005

Om:

Rumtidens Geometri
og
Bevægede Legemers Elektrodynamik

Problemformulering

- Redegør kort for den specielle relativitetsteori.
- Redegør grundigt for opfattelsen af rum og tid i den specielle relativitetsteori – herunder brugen af rumtidsdiagrammer.
- Udfør forsøget, *en lang lige leder*.
- Vurdér eksperimentet i forhold til den specielle relativitetsteori.

Indhold

1	Indledning	6
2	Den nye fysik	7
2.1	Einsteins postulater	7
2.2	En ny fysik	7
2.3	Introduktion til tidsforlængelsen og længdeforkortelsen	8
2.4	Lorentztransformationen	9
2.5	Minkowski Metrikken	10
2.5.1	Udsendelse af et lysglimt	10
2.5.2	Invariansen af Minkowski metrikken	11
2.6	Eksempel: En rejse gennem mælkevejen	12
3	Rumtiden	13
3.1	Rumtidsdiagrammer	13
3.2	Visualisering af Lorentztransformationen	15
3.3	Anvendelse af rumtidsdiagrammer	16
3.4	Størrelsen af Δs^2	17
4	Ekseriment: En lang lige leder	19
4.1	Beskrivelse af forsøget	19
4.2	Databehandling	20
4.3	Vurdering af forsøget	21
4.4	Fejlkilder og måleusikkerheder	21
4.5	Resultat af forsøget	22
5	Eksperimentet i relation til den specielle relativitetsteori	23
5.1	To parallelle ledere	23
5.2	Mit eget forsøg I	23
5.3	Sammenhængen mellem det elektriske og det magnetiske felt	24
5.4	Mit eget forsøg II	28
6	Konklusion	29
A	Invariante og konstante størrelser	30
B	Inertialsystemer	31
B.1	Om notation	31

C Rum og tid i den klassiske mekanik	32
C.1 Galileitransformationen	32
C.2 Metrikken	32
C.3 Den klassiske opfattelse af rum og tid	33
D Udledning af Tidsforlængelsen og Længdeforkortningen	35
D.1 Feynmann uret	35
D.2 Længdeforkortningen	36
E Måleresultater	37
Litteratur	38

1 Indledning

I denne opgave vil jeg først introducere den specielle relativitetsteori og derefter komme ind på de omvæltninger, som Einsteins specielle relativitetsteori medførte i opfattelsen af rummet og tiden.

Efter dette vil jeg beskrive et udført forsøg om magnetfeltet omkring en lang lige leder. Til sidst vil jeg så vurdere, hvordan mit udførte forsøg kan forklares ved hjælp af resultater fra den specielle relativitetsteori.

Forudsætningerne for at kunne forstå denne opgave er et grundigt kendskab til opfattelsen af rummet og tiden i den klassiske mekanik. I bilag A og B introducerer jeg den terminologi og notation, som jeg vil bruge opgaven igennem, og i bilag C beskriver jeg opfatelsen af rum og tid i den klassiske mekanik.

Angående min litteratur er de fleste værker universitetsbøger, der kan hentes gratis på nettet. Jeg har valgt, at benytte sådanne bøger, da de går markant mere i dybden med opfattelsen af rum og tid sammenlignet med de gymnasiebøger, som jeg har kunnet finde om speciel relativitetsteori. Jeg har dog brugt et par bøger målrettet mod gymnasieelever i forbindelse med det udførte eksperiment, samt vurderingen af dette.

Selve opgavebesvarelsen til denne opgave er mere end de tilladte 15 sider. Dette er dog kun, hvis man regner med de figurer, sideskift, ligningskonstruktioner og ikke mindst de forholdsvis brede marginer, som jeg har brugt i min opgave. I afsnittet om rumtiden har jeg også brugt særligt mange figurer, hvilket var nødvendigt, da *rumtidsdiagrammerne* heri blev beskrevet. Hvis man fjernede alle billeder, sideskift og så videre, ville opgaven svare til de tilladte 15 sider.

2 Den nye fysik

I dette afsnit vil jeg beskrive overgangen fra den klassiske fysik til den relativistiske fysik. Det forudsættes, at læseren er bekendt med stoffet, som er beskrevet i bilag A, B og C.

2.1 Einsteins postulater

I 1905 præsenterede Albert Einstein to postulater, som var meget modstridende med den hidtige opfattelse af rum og tid.¹

De to postulater, som Einstein kaldte *relativitetsprincippet*, siger følgende:

1. De samme fysiske love gælder i alle inertialsystemer.
2. I det fri rum udbreder lyset sig med hastigheden, c , i alle inertialsystemer.

Einstein fremsatte disse postulater på baggrund af elektrodynamiske fænomener, hvorudfra Einstein kunne se det rimelige i det første postulat.

Det andet postulat er nærmest en direkte følge af det første. Hvis alle de fysiske love gælder i alle inertialsystemer, må Maxwells ligninger² for eksempel også gælde i alle inertialsystemer og dermed være invariante. I Maxwells ligninger optræder konstanten c for lysets hastighed. For at ligningerne kan være invariante, må c således også være invariant. Heraf kommer det andet postulat altså.

2.2 En ny fysik

I dette afsnit vil jeg se på, hvad konsekvenserne af Einsteins postulater er. Postulateret om lyshastighedens invarians strider kraftigt imod den klassiske fysik. I den klassiske fysik ville lyshastigheden transformere på samme måde som enhver anden hastighed. Dette kan for eksempel ses ved betragtelse af galileitransformationen, (C.1), da der i denne ikke indgår nogen grænse for, hvor stor en værdi en hastighed kan have.

Da galileitransformationen ikke tillader, at c er invariant, må de klassiske transformationsligninger bortkastes og erstattes med nogle nye, som netop opfylder, at c er invariant. Ved at gøre dette ændrer man ikke alene på nogle transformationsligninger; man ændrer faktisk på selve opfattelsen af rum og tid. Og i og med at *alle* fysiske fænomener udfolder sig i rummet og i tiden, må man også revidere de fleste fysiske love.

At Einsteins postulater rent faktisk passer – det er der masser af eksperimenter, der har vist – betyder, at den klassiske fysiks love ikke beskriver virkeligheden korrekt, og derfor må erstattes af nogle nye love.

¹Kilden til dette hovedafsnit er [AE1] s. 1-2 samt [MD] kapitel 1, 2, 3 og 5.

²Maxwells ligninger er 4 ligninger, som forener magnetismen og elektriciteten, som én af de 4 naturkrafter, nemlig elektromagnetismen.

Selvom de klassiske fysiske love ikke er rigtige i yderste konsekvens, beskriver de alligevel virkeligheden godt. Før det 20'ende århundrede havde man ikke noget nævneværdigt empirisk belæg for at sige, at den klassiske fysik ikke beskrev virkeligheden korrekt. Tværtimod regnede man faktisk med, at man havde fundet fuldstændigt perfekte love for både elektromagnetismen og tyngdekraften, fordi man ikke observerede fænomener, som ikke kunne forklares med Newtons teori for tyngdekraften og Maxwells ligninger for elektromagnetismen.

I og med at den klassiske fysik fungerede så upåklageligt, som det var og er tilfældet, kunne man ikke uden videre forvente, at Einsteins teorier i ikke-ekstreme tilfælde skulle vende op og ned på fysikken. I ganske almindelige hverdagstilfælde må det således forventes, at Einsteins love går over i den klassiske fysiks love, for ellers ville Einsteins love ikke beskrive virkeligheden i og med, at næsten alle fænomener beskrives fint af den klassiske fysik.

Af Einsteins fysik må det således forventes, at den på den ene side stemmer overens med den klassiske fysik i ikke-ekstreme tilfælde, men samtidig giver anderledes beskrivelser af fysikken i de mere ekstreme tilfælde.

2.3 Introduktion til tidsforlængelsen og længdeforkortelsen

For at vise et eksempel på en situation, hvor Einsteins teori giver en anderledes beskrivelse af et fysisk fænomen end den klassiske fysik, vil jeg nu betragte et tankeeksempel, hvor en person, \mathcal{A} , udsender en raket, \mathcal{B} , som igen udsender en ny raket, \mathcal{C} . \mathcal{A} udsender \mathcal{B} med en hastighed, v_{AB} , der er givet ved $0.9c$. Derefter udsender \mathcal{B} den anden raket \mathcal{C} med hastigheden, $v_{BC} = 0.9c$. Det interessante er nu at finde ud af, med hvilken hastighed \mathcal{C} bevæger sig med i forhold til \mathcal{A} .

Ifølge den klassiske fysik er der ingen grænse for, hvor stor en hastighed kan blive, hvilket betyder, at v_{AC} kan findes ved at addere størrelserne af de to hastigheder, hvilket giver, at $v_{AC} = 1.8c$. Ifølge den klassiske fysik vil \mathcal{C} altså bevæge sig med en overlyshastighed i forhold til \mathcal{A} .

Ifølge Einsteins andet postulat vil man i alle inertialsystemer iagttage et lyssignal, som havende hastigheden, c . Heraf følger umiddelbart, at intet inertialsystem kan bevæge sig hurtigere end eller lig med hastigheden, c , da man så ikke ville iagttage et lyssignal til at have hastigheden, c , da nogle lyssignaler aldrig ville nå frem til inertialsystemet med overlyshastighed. Ifølge Einsteins fysik ville v_{AC} altså være mindre end c på grund af hans andet postulat.

I og med, at \mathcal{A} og \mathcal{C} vil iagttage den samme hastighed for et vilkårligt lyssignal, vil \mathcal{A} og \mathcal{C} ikke være enige om så basale ting som tidsintervaller og længder. I \mathcal{A} vil man iagttage, at et ur, der er placeret i hvile i forhold til \mathcal{C} , tikker med en lavere rate – det

går altså langsomt – og man vil ligeledes måle længden af en meterstok, som er i hvile i forhold til \mathcal{C} , som værende kortere end en meter – den er altså forkortet. Disse to effekter kaldes henholdsvis *tidsforlængelsen* og *længdeforkortelsen*.

Sætning 1 (Tidsforlængelsen). *Tidsforlængelsen kan beregnes via formlen,*

$$T = \gamma(v)\tau, \quad \gamma(v) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.1)$$

hvor T er et tidsinterval observeret i et inertialsystem, der bevæger sig med hastigheden v i forhold til inertialsystemet, hvor uret er i hvile. Tidsintervallet for urets eget inertialsystem kaldes egentiden og betegnes τ .

Sætning 2 (Længdeforkortelsen). *Længdeforkortelsen af et objekt beskrives ved formlen,*

$$L = \frac{L_0}{\gamma(v)} \quad (2.2)$$

hvor L_0 er hvilelængden og L er længden, der observeres af en iagttager, der bevæger sig med hastigheden, v , i forhold til objektets inertialsystem.

Når man bevæger sig med en stor hastighed i forhold til en anden iagttager, vil de længder, som man selv måler, og de iagttagne tidsintervaller altså blive henholdsvis forkortet og forlænget, hvilket er grunden til, at lyshastigheden kan forblive invariant. Hvis man fra alle inertialsystemer iagttog de samme længder og tidsintervaller ville lyshastigheden jo ikke kunne være den samme i alle inertialsystemer, hvilket blev vist i det netop omtalte eksempel.

På bilag D har jeg lavet en udledning af udtrykkene for tidsforlængelsen og længdeforkortelsen.

2.4 Lorentztransformationen

I og med at Einstein ændrede den klassiske opfattelse af rum og tid, må den klassiske galileitransformation erstattes med nogle nye transformationsligninger, der opfylder, at lyshastigheden er invariant i alle inertialsystemer.

Erstatningen til galileitransformationen er *lorentztransformationen*, som er givet ved

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) & \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ y' &= y & \Delta y' &= \Delta y \\ z' &= z & \Delta z' &= \Delta z \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) & \Delta t' &= \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Jeg har her opskrevet en version af lorentztransformationen, der repræsenterer koordinater, og en, der repræsenterer koordinatdifferenser. De opfylder begge, at den relative hastighed

mellem to inertialsystemer altid vil være mindre end c , idet $\gamma(v) \rightarrow \infty$ når $v \rightarrow c$. γ er således udefineret i $v = c$, hvilket er et godt argument for, at lorentztransformationen ikke tillader, at inertialsystemer bevæger sig med lysets hastighed. For $v > c$ bliver værdien af γ ren imaginær, hvilket fysisk set ikke giver mening. Man kan derfor sige, at lorentztransformationen stemmer overens med relativitetsprincippet ifølge disse betragtninger.

Det skal da også siges, at man kan udlede lorentztransformationen uden at indføre andre nye postulater end dem, der præsenteres i relativitetsprincippet. I [MD] udledes lorentztransformationen i detaljer. Jeg vil ikke selv gøre dette, da det er en forholdsvis besværlig matematisk proces, som ikke i sig selv giver nogen stor fysisk indsigt.

2.5 Minkowski Metrikken

2.5.1 Udsendelse af et lysglimt

Jeg vil nu betragte to inertialsystemer \mathcal{S} og \mathcal{S}' , som er i standardkonfiguration. Til tiden $t = t' = 0$ udsendes et lyssignal i deres fælles begyndelsespunkt. I \mathcal{S} vil man iagttage, at $r = ct$ og i \mathcal{S}' at $r' = ct'$, hvilket følger af, at c er invariant. I \mathcal{S} vil man beskrive situationen som følgende:

$$r^2 = c^2 t^2 \quad \iff \quad (2.4)$$

$$c^2 t^2 - r^2 = 0 \quad \iff \quad (2.5)$$

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (2.6)$$

hvor jeg til sidst har udnyttet sammenhængen $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. I \mathcal{S}' vil man tilsvarende iagttage:

$$r'^2 = c^2 t'^2 \quad \iff \quad (2.7)$$

$$c^2 t'^2 - r'^2 = 0 \quad \iff \quad (2.8)$$

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \quad (2.9)$$

For udbredelsen af et lyssignal må der gælde, at (2.6) og (2.9) er ækvivalente. Jeg vil nu betragte situationen, hvor de fire størrelser (t, x, y, z) , repræsenterer koordinatdifferenser, $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Dette giver følgende:

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \quad (2.10)$$

Ved at betragte koordinatdifferenser i stedet for koordinater opnås, at de betragtede inertialsystemer ikke behøves at være i standardkonfiguration for, at udtrykket er sandt.

Indtil videre vides det, at (2.10) gælder for udsendelsen af et lysglimt. En størrelse, Δs^2 , defineres som følgende:

$$\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.11)$$

Bemærkning 1 (Matematisk notation). Når der i denne opgave for eksempel skrives Δr^2 , menes der $(\Delta r)^2$. Den notation, som jeg bruger, er ikke fuldstændig matematisk korrekt i og med, at der normalt gælder, at $\Delta r^2 = \Delta(r^2)$.

2.5.2 Invariansen af Minkowski metrikken

Jeg vil nu vise, at Minkowski metrikken, Δs^2 , som er fastlagt ved (2.11) ikke alene er invariant ved udsendelse af et lyssignal, men faktisk også i alle andre situationer.

For at vise dette vil jeg betragte to inertialsystemer, \mathcal{S} og \mathcal{S}' . I \mathcal{S} er Δs^2 givet ved,

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.12)$$

Og i \mathcal{S}' er $\Delta s'^2$ givet ved,

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \quad (2.13)$$

Såfremt Δs^2 er invariant, må der gælde, at $\Delta s^2 = \Delta s'^2$. For at vise, at dette er tilfældet vil jeg anvende (2.3) på (2.13):

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \quad (2.14a)$$

$$= \gamma^2 \left(c \Delta t - \frac{\Delta x v}{c} \right)^2 - \gamma^2 (\Delta x - v \Delta t)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.14b)$$

$$= \gamma^2 \left((c \Delta t - \frac{\Delta x v}{c})^2 - (\Delta x - v \Delta t)^2 \right) - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.14c)$$

$$= \frac{(c \Delta t - \frac{\Delta x v}{c})^2 - (\Delta x - v \Delta t)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.14d)$$

$$= \frac{c^2 \Delta t^2 + \frac{\Delta x^2 v^2}{c^2} - 2 \Delta x v \Delta t - \Delta x^2 - v^2 \Delta t^2 + 2 \Delta x v \Delta t}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$= \frac{c^2 \Delta t^2 + \frac{\Delta x^2 v^2}{c^2} - \Delta x^2 - v^2 \Delta t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.14e)$$

$$= \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.14f)$$

$$= c \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.14g)$$

$$= \Delta s^2 \quad (2.14h)$$

Jeg har således vist, at Δs^2 er invariant. Jeg vil komme ind på konsekvenserne af dette i afsnit 3.

Indskud 1 (Definition af τ). Indtil videre har jeg beskæftiget mig med to relativistiske invarianter, nemlig Δs^2 og c^2 . Ved at tage forholdet mellem disse kan man finde en tredje invariant, nemlig kvadratet af egentiden, τ^2 :

$$\tau^2 \equiv \frac{\Delta s^2}{c^2} \quad (2.15)$$

som nu er den tredje lorentzinvariante størrelse, jeg har bestemt. Dette er selvfølgelig den samme egentid, som var givet ved (2.1). Dette kan nemt indses ved at betragte (2.11). Det kortest mulige observerede tidsinterval for en partikel opnås ifølge (2.11), når $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (0, 0, 0)$, og det er netop tilfældet, når man er i hvile i forhold til den omtalte partikel. Ved at betragte (2.1) ses det også, at det kortest mulige iagttagne tidsinterval iagttages, når man er i hvile relativt til partiklen. Netop derfor er det den samme τ , der indgår i begge udtryk.

2.6 Eksempel: En rejse gennem mælkevejen

Jeg har nu redegjort for en masse teori angående den specielle relativitetsteori. Ud fra denne teori kan man løse langt de fleste problemer, som omhandler situationer, hvor man skal regne relativistisk. Jeg vil nu vise et eksempel, hvor jeg alene ved at udnytte invariansen af Δs^2 , samt tidsforlængelsen og længdeforkortningen, kan beregne, om det er muligt for et menneske at rejse igennem mælkevejen, idet et menneskes levetid sættes til 70 år. Jeg vil desuden regne med, at mælkevejen har længden $3 \cdot 10^{20}$ m, når man er i hvile til den.

Personen, der rejser igennem mælkevejen med hastigheden, v , vil i forhold til ham selv have levetiden, $\tau = 70 \cdot \pi \cdot 10^7$ s. Jeg har her udnyttet, at 1 år kan approksimeres til $\pi \cdot 10^7$ sekunder. Ifølge (2.15) kan Δs^2 da findes ved

$$\Delta s^2 = c^2 \tau^2 = c^2 \cdot (70 \cdot \pi \cdot 10^7 \text{ s})^2 \quad (2.16)$$

Tiden, som personen er om at rejse igennem mælkevejen, vil relativt til mælkevejen være forlænget til, $T = \gamma(u)\tau$. Dette giver følgende for Δs^2 :

$$\Delta s^2 = c^2 (\gamma(u) \tau)^2 - L_0^2 = c^2 (\gamma(u) 70 \cdot \pi \cdot 10^7 \text{ s})^2 - (3 \cdot 10^{20} \text{ m})^2 \quad (2.17)$$

Jeg har tidligere vist, at Δs^2 er invariant, hvilket selvfølgelig medfører, at de to udtryk for Δs^2 er lig med hinanden. Dette giver:

$$c^2 \cdot (70 \cdot \pi \cdot 10^7 \text{ s})^2 = c^2 (\gamma(u) 70 \cdot \pi \cdot 10^7 \text{ s})^2 - (3 \cdot 10^{20} \text{ m})^2 \quad (2.18)$$

Den eneste ubekendte i dette udtryk er v . Ved indsættelse af $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ og $c = 2.99792458 \cdot 10^8$ m/s kan man finde den hastighed, som man skal rejse med for, at kunne tilbagelægge mælkevejen på et menneskeliv.

Den eneste positive rod³ til den opskrevne ligning er $v = 299791734.1 \cdot 10^8$ m/s, hvilket svarer til $0.9999975853 \cdot c$. Ved at rejse med denne hastighed er det således teoretisk set muligt, at rejse hele mælkevejen igennem på et menneskeliv.

³Jeg har løst ligningen i Maple.

3 Rumtiden

I afsnit 2.5 viste jeg, at størrelsen,

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (3.1)$$

var invariant over for enhver lorentztransformation. Betydningen af Δs^2 er derfor stor. Ligesom hele geometrien bag den klassiske fysik er bygget op omkring Δr^2 , skal hele geometrien bag den specielle relativitetsteori bygges op omkring invariansen af Δs^2 .

På mange måder minder Δr^2 og Δs^2 om hinanden. Dette kan for eksempel ses ved at skrive Δs^2 på formen,

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 \quad (3.2)$$

Herudfra ses det, at den eneste forskel på de to metrikker er, at der på minkowski-metrikken er tilføjet en tidslig komponent; nemlig $c^2 \Delta t^2$. At rum-komponenten og tidskomponenten begge optræder i metrikken betyder, at rummet og tiden, sammenblandes på en mærkværdig måde. Rummet og tiden er simpelthen fuldstændigt afhængige af hinanden, og ved for eksempel at bevæge sig i rummet, bevæger man sig også i tiden.

Denne sammenblanding af rum og tid fører til, at man ikke længere kan sige, at alle begivenheder alene finder sted i et tre-dimensionelt rum. Dette skyldes, at der også er en tidslig komponent i minkowskimetrikken. Derfor indfører man tiden, som den fjerde dimension, hvor den ene af de fire dimensioner, (ct) , kaldes den tidslige dimension og de andre (x, y, z) kaldes de rumlige dimensioner. Der er således ikke tale om et 4-dimensionelt rum, men derimod et 3-dimensionelt rum og en tidsdimension, der sammenblandes i et kontinuum; den såkaldte *rumtid*.

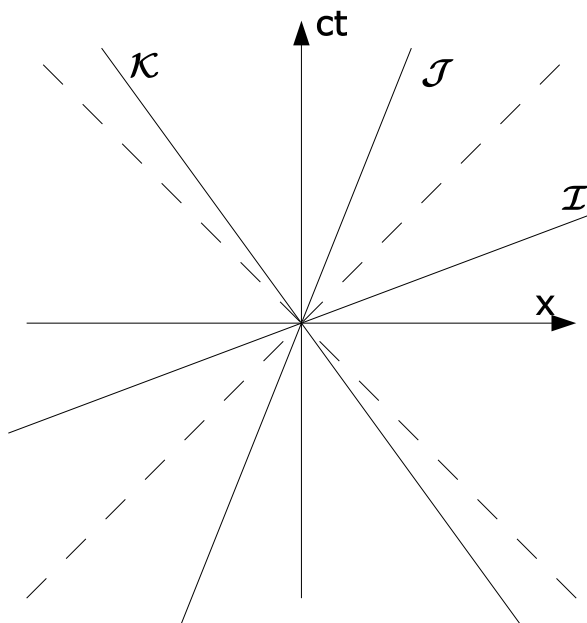
3.1 Rumtidsdiagrammer

Jeg vil nu introducere *rumtidsdiagrammet*⁴, hvilket er et særdeles godt værktøj til at få en mere intuitiv forståelse for opfattelsen af rummet og tiden i den specielle relativitetsteori.

Et rumtidsdiagram kan bruges til at vise forskellige begivenheder fra forskellige inertialsystemer i det samme diagram. En begivenhed er matematisk set et punkt i rumtiden bestående af de fire koordinater, (ct, x, y, z) . Jeg har her valgt at multiplicere tiden med lysets hastighed, da dette vil være bekvemt senere hen. Herved opnås det også, at alle størrelser til en begivenheds koordinater har samme enheder.

Rumtiden består som nævnt af 4 koordinater, hvilket betyder, at man ikke kan lave en fuldstændig grafisk afbildning af alle 4 dimensioner på et papir. For at forsimple tilfældende vil jeg udelukkende betragte situationer, hvor en begivenheds y- og z-koordinater er 0,

⁴Resten af dette hovedafsnit er til dels baseret på [DH], [MD] kapitel 2 og 5, [SC] kapitel 2 og [TW].



Figur 1: På denne figur ses tre verdenslinjer for tre forskellige partikler, \mathcal{I} , \mathcal{J} og \mathcal{K} .

hvilket fører til at rumtiden kan afbildes i et diagram, hvor størrelserne (ct) og (x) er langs hver deres akse.

Umiddelbart lyder det som en stor forsimpning, at y og z er udeladt. Men faktisk er det kun i ganske få tilfælde, at dette betyder noget. Oftest kan man jo bare fastlægge sit koordinatsystem således, at $y = z = 0$.

På figur 1 ses et diagram, hvori abscissen betegner x og ordinaten betegner ct i det givne inertialsystem. Fra inertialsystemet har man betragtet tre partikler – \mathcal{I} , \mathcal{J} og \mathcal{K} – i et tidsinterval og plottet deres positioner i rumtidsdiagrammet. På figuren ses såkaldte *verdenslinier* for partiklerne. Man kan se, at partiklerne bevæger sig i forhold til det betragtede inertialsystem, da deres position, x , i alle tilfældene ikke er den samme for forskellige værdier af ct .

Deres hastighed i forhold til det betragtede inertialsystem, kan beskrives som hældningen af verdenslinjen i forhold til andenaksen i diagrammet. Eller set med matematiske øjne er hastigheden, $c \frac{dx}{dt}$. Hældningen viser således brøkdelen af lysets hastighed, som en verdenslinje bevæger sig med. På figuren er indtegnet stiplede linier⁵, som netop viser verdenslinjer for fotoner, der bevæger sig med lysets hastighed. Partikler, der har verdenslinjer, der er mindre en c , vil derfor have en mindre hældning i forhold til ct -aksen end de stiplede linjer, og omvendt vil partikler med overlyshastighed have en større hældning i forhold til ct – *aksen*.

⁵De stiplede linier kaldes formelt *lyskeglen*.

Heraf ses det, at alle partiklerne på figur 1 bevæger sig med konstant hastighed, da deres verdenslinjer er rette linjer.

I øvrigt ses det, at partiklen \mathcal{I} bevæger sig med en positiv overlyshastighed⁶, og \mathcal{J} bevæger sig med en positiv underlyshastighed, og \mathcal{K} bevæger sig med en negativ underlyshastighed.

3.2 Visualisering af Lorentztransformationen

Jeg vil nu vise, hvorledes man kan visualisere lorentztransformationen i et 2-dimensionalt rumtidsdiagram.

Lorentztransformation i et rumtidsdiagram viser, hvordan forskellige begivenheder forløber set fra forskellige inertialsystemer. For at dette kan lade sig gøre, skal man afbilde flere inertialsystemer i det samme diagram. På rumtidsdiagrammet på figur 3 ses to inertialsystemer \mathcal{S} og \mathcal{S}' . x - og ct -akserne er afbildet ortogonalt, som det er vanligt at gøre det. Derimod er x' - og ct' -akserne ikke ortogonale, hvilket skyldes, at \mathcal{S} og \mathcal{S}' er i indbyrdes bevægelse. Dette kan indses ved at betragte situation set fra \mathcal{S} . I forhold til \mathcal{S} opfylder alle punkterne i \mathcal{S} følgende:

$$x = \text{konst} \quad \wedge \quad ct = \text{konst} \quad (3.3)$$

I \mathcal{S}' vil man tilsvarende opfatte følgende for punkter i \mathcal{S}' :

$$x' = \text{konst} \quad \wedge \quad ct' = \text{konst} \quad (3.4)$$

Ifølge lorentztransformationen, (2.3), opfylder (3.4) følgende i \mathcal{S} :

$$x' = \text{konst} \implies \gamma(x - vt) = \text{konst} \implies x - vt = \text{konst} \iff x - \frac{v}{c} ct = \text{konst} \quad (3.5)$$

$$ct' = \text{konst} \implies \gamma(ct - vx/c) = \text{konst} \implies ct - \frac{v}{c} x = \text{konst} \quad (3.6)$$

x' -aksen opfylder, at $ct' = 0$, og ct' -aksen opfylder, at $x' = 0$. Ved indsættelse af dette i henholdsvis (3.6) og (3.5) fås følgende udtryk for de to akser i \mathcal{S}' set fra \mathcal{S} :

$$x' : \quad ct = \frac{v}{c} x \quad (3.7)$$

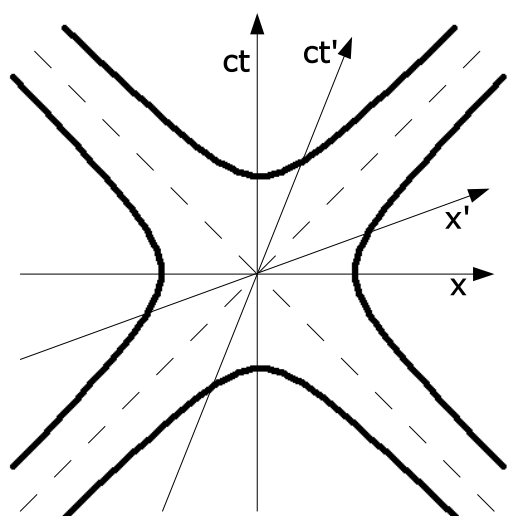
$$ct' : \quad x = \frac{v}{c} ct \quad (3.8)$$

På figur 2 og 3 ses eksempler på, hvorledes akserne af et inertialsystem, \mathcal{S}' , kan kan se ud.

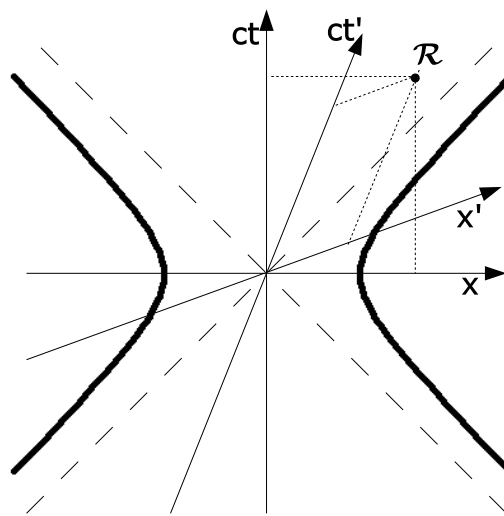
På figur 3 er desuden indtegnet et punkt, \mathcal{R} . På figuren ses, hvorledes man finder koordinatsættet til dette punkt i hvert af inertialsystemerne.

Når man indtegner et diagram, som viser begivenheder i rumtiden på et papir, som er en 2-dimensionel flade, er det, der svarer til en længdeenhed i de forskellige inertialsystemer, ikke det samme, når man måler det på papiret. For at kunne finde *enhedsafstanden*

⁶Dette kan selvfølgelig ikke lade sig gøre ifølge den specielle relativitetsteori.



Figur 2



Figur 3

i de forskellige koordinatsystemer anvendes det, at størrelsen, s^2 , er invariant for inertialsystemer i standardkonfiguration. Ved at indtegne hyperblerne,

$$c^2t^2 - x^2 = \pm 1 \quad (3.9)$$

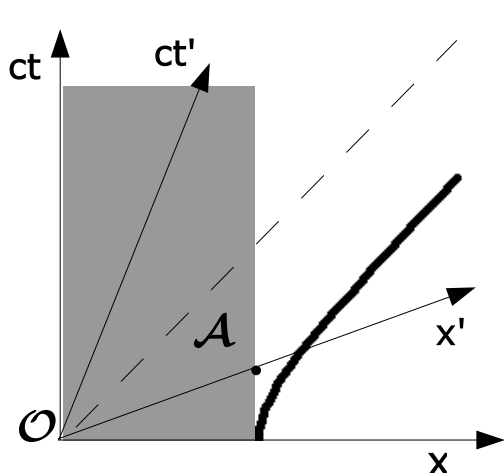
fås nogle hyperbler, ud fra hvilke man kan aflæse enhedsafstanden i forskellige inertialsystemer. Skæringen mellem en given akse og den dertil hørende *kalibreringshyperbel* viser således enhedsafstanden i et givet inertialsystem.

Jeg vil nu betragte to inertialsystemer, \mathcal{T} og \mathcal{T}' . Som sædvanligt afbildes \mathcal{T} ved at lade vinklen mellem de to akser være 90 grader. Når den relative hastighed mellem de to inertialsystemer forstørres, vil akserne af \mathcal{T}' lukke sig omkring de stiplede linjer, som repræsenterer et lyssignal udsendt fra Origo. Der gælder således, at alle hyperblerne går asymptotisk mod de stiplede linjer for $v \rightarrow c$. Og derudover vil man i alle inertialsystemer betragte den samme lyshastighed, netop fordi alle iagttagerne er enige om placeringen af lyskeglen i diagrammet, hvilket er en følge af den asymptotiske egenskab. I de forskellige inertialsystemer vil man således iagttage forskellige tidsintervaller og længder, hvorimod lyshastigheden forbliver den samme i alle inertialsystemer.

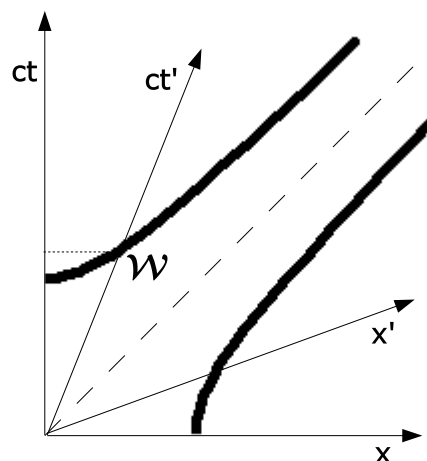
3.3 Anvendelse af rumtidsdiagrammer

Jeg vil nu vise to eksempler på anvendelse af rumtidsdiagrammer. På figur 4 er der en stang anbragt i hvile i \mathcal{S} . I \mathcal{S} vil denne stangs placering således være uændret, hvorfor den i rumtidsdiagrammet vil tilsvare det grå skraverede område, som ses på figuren. Stangens hvilelængde defineres til at være enhedslængden i diagrammet. I \mathcal{S} ses, at stangens længde

tilsvarende hvilelængden, som er netop, hvor stangen skærer kalibreringspunktet på x -aksen. Stangens skæring med x' -aksen – dette punkt betegnes \mathcal{A} – tilsvarende derimod en lavere længde end enhedslængden, da afstanden $|\mathcal{O}\mathcal{A}|$ er mindre end afstanden fra \mathcal{O} til skæringspunktet mellem kalibreringshyperblen og x' -aksen. Længdeforkortelsen kan således aflæses i rumtidsdiagrammet på figur 4.



Figur 4



Figur 5

På figur 5 er et ur i hvile i \mathcal{S}' i $x' = 0$. Kalibreringshyperblen skærer punktet \mathcal{W} , hvor der i \mathcal{S}' er gået netop én tidsenhed. Som det vises på figuren er der i forhold til en observatør i \mathcal{S} gået et længere tidsrum, da ordinaten til punktet ligger højere på andenaksen end kalibreringshyperblen. I \mathcal{S} oplever man således, at uret tikker med en langsommere rate, end det er tilfældet i \mathcal{S}' .

3.4 Størrelsen af Δs^2

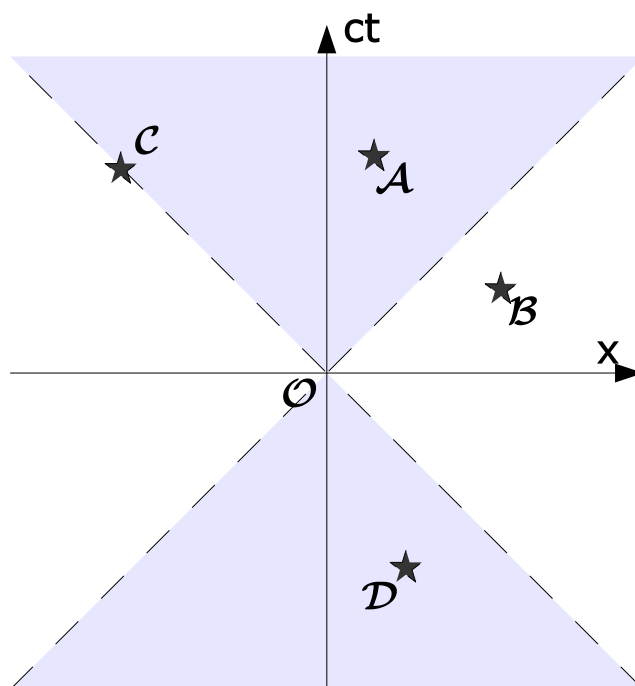
Jeg vil nu lave nogle betragtninger om størrelsen af Δs^2 . Om størrelsen af denne må gælde, at den enten er større end nul, mindre end nul eller netop lig nul. For at belyse dette forhold omskriver jeg det sædvanlige udtryk for Δs^2 :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 \quad (3.10)$$

$$= \Delta t^2 \left(c^2 - \frac{\Delta r^2}{\Delta t^2} \right) \quad (3.11)$$

I (3.11) er $\Delta r^2/\Delta t^2$ et udtryk for kvadratet af den hastighed som man skal bevæge sig med for at nå fra den ene af de betragtede koordinater til den anden⁷. For $\Delta s^2 = 0$ skal man ifølge (3.11) bevæge sig med lysets hastighed for at komme fra den ene begivenhed til den

⁷Husk, at Δs^2 er (kvadratet af) en forskydning mellem to begivenheder.



Figur 6

anden. Et eksempel på dette ses på figur 6, hvor $\Delta s^2 = 0$ er kvadrattet af forskydningen mellem \mathcal{O} og \mathcal{C} . For $\Delta s^2 = 0$ vil det således være muligt at sende signaler imellem de to begivenheder.

Når $\Delta s^2 > 0$ kan man ifølge (3.11) nå fra den første af de betragtede begivenheder til den anden ved at bevæge sig med hastigheden, $\Delta r/\Delta t$. På figur 6 kan man således komme fra \mathcal{D} til \mathcal{O} og fra \mathcal{O} til \mathcal{A} ved at bevæge sig med underlyshastigheder.

På den omtalte figur har jeg lavet området, hvor $\Delta s^2 \geq 0$ gråt, hvilket markerer, at begivenheder, der ligger indenfor dette område, enten kan sende eller modtage signaler til/fra \mathcal{O} , alt efter om de finder sted før eller efter \mathcal{O} . Dvs., at det er disse begivenheder, der kan påvirke \mathcal{O} eller som kan blive påvirket af denne.

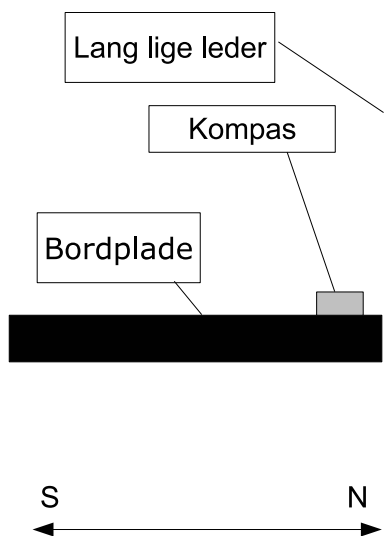
For begivenheden, \mathcal{B} , er $\Delta s^2 < 0$, hvilket betyder, at der på ingen måde kan udveksles signaler mellem \mathcal{O} og \mathcal{C} , da dette ifølge (3.11) ville kræve et signal udsendt med overlyshastighed, hvilket den specielle relativitetsteori ikke tillader. Til gengæld findes der et inertialsystem, hvori disse begivenheder vil være samtidige. Dette er inertialsystemet, hvori $\Delta s^2 = -\Delta r^2$ ifølge (3.10). Hvis man indtegnede dette inertialsystems akser på figuren, ville en linje parallel med x' -aksen skære både \mathcal{O} og \mathcal{B} således, at $\Delta t' = 0$.

4 Ekseriment: En lang lige leder

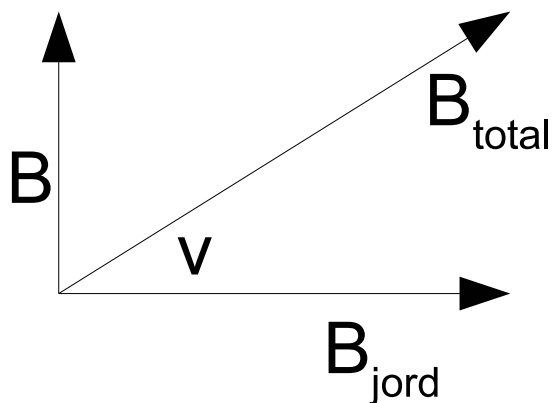
I dette afsnit vil jeg lave en kort beskrivelse af forsøget, som jeg udførte.

4.1 Beskrivelse af forsøget

I det udførte forsøg målte jeg magnetfeltet fra en lang lige leder. Lederen var hængt i loftet, hvorfra jeg lod den hænge lodret ned mod jorden.



Figur 7



Figur 8

Jeg placerede et bord, således at bordkanten var placeret lige opad lederen, som det ses på figur 7.

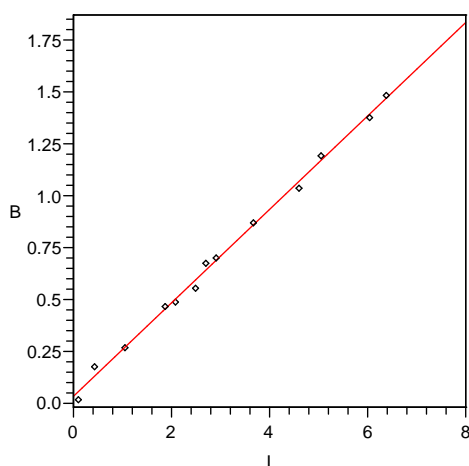
Herefter satte jeg et kompas på bordet et lille stykke væk fra lederen. Jeg drejede kompasset på en sådan måde, at magneten i kompasset var parallelt med jordens tyngdefelt.

Efterfølgende målte jeg vinklen, som kompasnålen slog ud med ved variable strømstyrker, men med den samme afstand til lederen. Det skal lige siges, at jeg fastlog nulpunktet for vinklen, da der ikke var strøm i lederen.

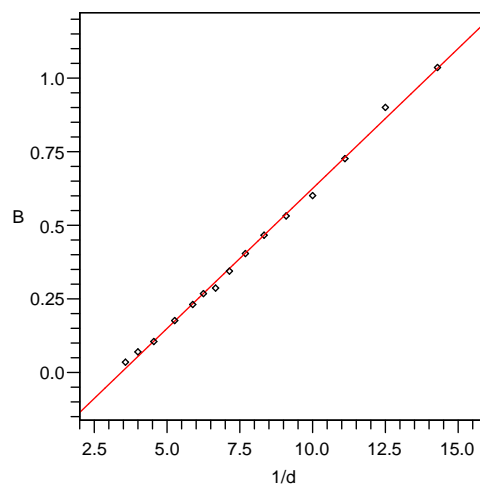
Mine måleresultater, som består af forskellige vinkler, θ , ved forskellige strømstyrker, I , ses på bilag E.

Herefter udførte jeg et forsøg, hvor jeg holdt strømstyrken konstant og varierede afstanden, a , til lederen. Jeg målte vinklen, ϕ på tilsvarende måde som før. Måleresultaterne for denne del af forsøget kan også findes på bilag E.

I [EN] ses en mere grundig beskrivelse af det udførte forsøg.



Figur 9



Figur 10

4.2 Databehandling

Når man skal finde størrelsen af den magnetiske feltstyrke, B , ud fra den målte vinkel, kan det gøres via formlen:

$$B = B_{jord} \tan v \quad (4.1)$$

hvor B_{jord} er jordens magnetfelt og v er den målte vinkel. Relationen, (4.1), kan nemt ses ved at betragte vektorerne på figur 8.

Jeg kender ikke præcis størrelsen af jordens magnetfelt, hvilket betyder, at jeg ikke kan bestemme størrelsen af B i SI-enheder. Men da B_{jord} er konstant på stedet, hvor målingerne blev udført, kan jeg bare definere denne til at være 1, hvilket giver:

$$B = \tan v \quad (4.2)$$

I de følgende beregninger vil jeg således ikke anvende SI-enheder, da jordens magnetfelt ikke er 1 på stedet, hvor forsøget blev udført ifølge disse. Det skal i øvrigt bemærkes, at valget af enheder er fuldstændig uden fysisk mening, men derimod ganske praktisk i mange tilfælde. I dette eksperiment ønsker jeg at udlede en lov, hvilket betyder, at valget af enheder ikke på nogen måde har indflydelse på resultatet af loven, bortset fra størrelsen af eventuelle konstanter, der optræder i loven. Fysikken er jo den samme uanset valg af enheder.

På figur 9 ses et plot med målte værdier af strømstyrken, I , som abscisse og den magnetiske feltstyrke, B , som ordinat.⁸ Umiddelbart ses det, at måleresultaterne udgør

⁸Jeg har ikke angivet enheder på grafen og i regressionen, da dette ikke vil give mening jvf. min definition af $B_{jord} = 1$.

en ret linje, hvorfor jeg også har indtegnet en lineær regression på figuren. Den lineære regression har forskriften,

$$B = 0.225I + 0.0340 \quad (4.3)$$

Forklaringsgraden på regressionen er 0.9964, hvilket betyder, at regressionen er forholdsvis god.

På figur 10 er de plottede punkter, givet ved $(\frac{1}{a}, B)$. Igen har jeg lavet lineær regression og fået følgende forskrift for den bedste rette linje gennem målepunkterne (denne rette linje er også indtegnet på figuren):

$$B = 0.0951\frac{1}{a} + 0.326 \quad (4.4)$$

Denne regression har også en forholdsvis høj forklaringsgrad; nemlig 0.9974. Det ses i øvrigt, at på begge grafer stemmer regression og måleresultater godt overens med hverandre.

4.3 Vurdering af forsøget

I sidste afsnit fandt jeg ud af følgende sammenhænge:

$$B = \text{konst } I \quad (4.5)$$

$$B = \text{konst } \frac{1}{a} \quad (4.6)$$

Jeg har her udeladt de konstante led, som skyldes måleusikkerheder, hvilket jeg vil begrundede senere. I øvrigt skal det bemærkes, at konstanterne i de to netop opskrevne udtryk ikke er lig hinanden. At B og I er ligefrem proportionale, når a holdes konstant, og B og a er omvendt proportionale, når I holdes konstant, fører til følgende sammenhæng mellem B , I og a :

$$B = \text{konst } \frac{I}{a} \quad (4.7)$$

4.4 Fejkilder og måleusikkerheder

I forsøget var der et par fejkilder og måleusikkerheder, som påvirkede forsøget en smule.

Den største måleusikkerhed var, at jeg kun målte kompasnålens udsving til den ene side, hver gang jeg målte udslagsvinklen. For at optimere præcisionen burde jeg have vendt strømmen ved hver måling og derefter taget gennemsnittet af størrelsen af de to udslagsvinkler. Hvis jeg havde gjort dette, ville begge mine regressioner med større tilnærmelse have skæret punktet $(0,0)$, hvilket ville betyde, at der ikke ville være konstante led i regressionerne, som det her var tilfældet.

4.5 Resultat af forsøget

I dette forsøg har jeg således via mit eksperiment vist formelen, $B = \text{konst} \frac{I}{a}$, gælder for en lang lige leder. Ifølge [EN] gælder følgende sammenhæng mellem B , I og a :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^{-2} \quad (4.8)$$

hvilket tilsvarende præcis den samme sammenhæng mellem de tre størrelser, som jeg tidligere kom frem til.

5 Eksperimentet i relation til den specielle relativitetsteori

I eksperimentet, *En lang lige leder*, fandt jeg ud af, at den magnetiske feltstyrke afhang ligefrem proportionalt med strømstyrken, I , gennem ledningen, hvis man holdt afstanden til lederen konstant. Denne strømstyrke må være et mål for, hvor hurtigt elektronerne i lederen bevæger sig; jo flere elektroner, der siver igennem et tværsnit af lederen pr. sekund, jo større fart må elektronerne have. Og jo større fart elektronerne har jo mere vil afstanden mellem være forkortet i forhold relativt til lederen ifølge længdeforkortningen. Jo højere strømstyrken er, jo større vil en eventuel relativistisk effekt således også være.

5.1 To parallelle ledere

For at vise, hvad denne relativistiske effekt gør, vil jeg betragte to parallelle lange ledere. Når der ikke løber nogen strøm i disse, vil der ikke være nogen kraft imellem de to ledere, thi tætheden af positive ladninger og negative ladninger er lig med hverandre. Jeg vil først betragte, hvad der sker, hvis man sætter strøm til lederne og strømmen i lederne går i samme retning.

I dette tilfælde vil elektronerne bevæge sig i det samme inertialsystem med en hastighed i forhold til de positive ladninger. Set herfra vil tætheden af positive ladninger være forstørret, hvilket vil resultere i en kraft imellem elektronerne og de positive ladninger, hvorfor ledningerne vil tiltrække hinanden.

Når strømmen i de to ledere går i hver sin retning, vil der stadig være den samme effekt som før med hensyn til tætheden af de positive ladninger set fra elektronernes inertialsystemer. Men set fra en af de to ledere vil tætheden af elektroner i den anden leder være meget større end tætheden af de positive ladninger, da elektronerne bevæger sig med en fart i forhold til hinanden, der er cirka dobbelt så stor som de positive ladningers. Den relativistiske længdeforkortning sørger således for, at man fra elektronernes inertialsystemer vil se, at den anden leder er negativt ladet. Derfor vil der da være en frastødende kraft imellem de to ledere.

5.2 Mit eget forsøg I

Jeg vil nu se på det forsøg, som jeg selv udførte. Først vil jeg dog lige introducere et par sammenhænge angående elektricitet og magnetisme.

Sætning 3 (Det magnetiske felt). *Hvis et legeme med ladningen, q , bevæger sig med hastigheden, \mathbf{v} , i forhold til en lang strømførende leder, der frembringer et magnetisk felt, \mathbf{B} , vil den magnetiske kraft på legemet være givet ved,*

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.1)$$

i forhold til lederens inertialsystem. Det magnetiske felt, \mathbf{B} , er givet ved,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \mathbf{r} \quad \implies \quad (5.2)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (5.3)$$

hvor (5.3) er sammenhængen, som mit forsøg viste.

Sætning 4 (Det elektriske felt). Når en elektrisk ladning er i et elektrisk felt, \mathbf{E} , vil den blive påvirket af kraften,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (5.4)$$

hvor q er ladningen.

Ud fra disse sætninger kan jeg vil jeg nu analysere mit forsøg. Jeg vil se på en ladning, der bevæger sig med hastigheden v i forhold til lederens inertialsystem, \mathcal{L} . I \mathcal{L} vil man ikke iagttage noget elektrisk felt omkring lederen, da lederen samlet set vil være uladet. Derimod vil man iagttage et magnetisk felt, som vil påvirke det bevægede legeme. Fra \mathcal{L} vil den resulterende kraft på legemet derfor være givet ved (5.1).

Fra det bevægede legemes referencesystem, \mathcal{L}' , vil man ikke iagttage at dette legeme bliver påvirket af en magnetisk kraft. Ved indsættelse af $\mathbf{v} = \vec{0}$ i (5.1) fås, at den magnetiske kraft trivielt er nul. Derimod vil man iagttage en elektrisk kraft (Dette viser jeg senere).

I de to referencesystemer vil man således være uenige om, hvorvidt det er en magnetisk eller en elektrisk kraft, der påvirker de bevægede legeme.

Denne sammenhæng vil jeg belyse nærmere i det næste delafsnit.

5.3 Sammenhængen mellem det elektriske og det magnetiske felt

Jeg vil nu vise påstanden om, at den magnetiske kraft blot er et resultat af den elektriske kraft og nogle simple relativistiske love⁹. For at gøre dette vil jeg betragte en elektrisk leder med ladningstætheden, δ , der betegner antallet af ladninger pr. længdeenhed. Det antages, at ladningerne er fuldstændigt symmetrisk fordelt i lederen, hvilket vil være nødvendigt for at kunne lave de senere udregninger.

Hvis der placeres en cylinder med længden, l , omkring ledningen med ledningen i centrum vil størrelsen af den elektriske flux ifølge Gauss' lov givet ved

$$\phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\delta l}{\epsilon_0} \quad (5.5)$$

hvor ϵ_0 er en konstant. Forudsætningen for at vi kunne anvende Gauss' lov i den givne situation var, at ladningerne i den elektriske leder var symmetrisk fordelt.

⁹Dette afsnit er baseret på [EN1]. Her kan også findes information om Gauss' lov, som jeg vil anvende.

Overalt på overfladen af cylinderen, må størrelsen den elektriske feltstyrke, E , være konstant grundet symmetrien. Den elektriske flux kan i det givne tilfælde også udtrykkes som arealet af cylinderens overfladeareal, $2\pi rl$ multipliceret med den angivne feltstyrke. Heraf fås følgende for fluxen:

$$\phi \equiv \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \implies \phi = AE = 2\pi rlE \quad (5.6)$$

hvor r er cylinderens radius. Ved at udnytte de to udtryk for den elektriske flux fås

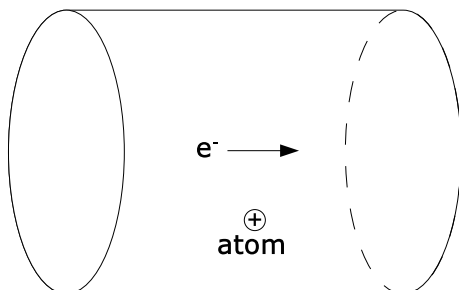
$$\frac{\delta l}{\epsilon_0} = 2\pi rlE \quad \iff \quad (5.7)$$

$$\frac{\delta}{\epsilon_0} = 2\pi rE \quad \iff \quad (5.8)$$

$$E = \frac{\delta}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (5.9)$$

Et legeme med ladningen q vil således blive påvirket med en elektrisk kraft med størrelsen, $\frac{\delta q}{2\pi\epsilon_0 r}$ af lederen.

Hvis man, når man er i hvile i forhold til lederen, ikke oplever nogen elektrisk kraft er tætheden af de elektrisk negative elektroner og de positive atomer lige store, da de elektriske ladninger så vil have udlignet hinanden. Der gælder således, at δ_- og δ_+ , der henholdsvis betegner tætheden af elektroner og positive atomer, er lige store, dog med modsat fortegn.



Figur 11

På figur 11 ses en leder, hvor der er sat strøm til således, at atomkernerne og elektronerne er i indbyrdes bevægelse. Når man er i hvile til lederen, iagttager man således den længst mulige afstand mellem de positive atomer, men derimod ikke den længst mulige afstand mellem elektronerne, da denne afstand er forkortet i og med, at de bevæger sig i forhold til én. Dette er selvfølgelig på grund af den relativistiske længdeforkortning, der gør, at længden af den betragtede cylinder ændres med hastigheden, som man bevæger sig med i forhold til lederen. Hvis længden af cylinderen i forhold til lederen er l_0 vil længden af cylinderen, da være givet ved

$$l = l_0/\gamma \quad (5.10)$$

Antallet af ladninger, som cylinderen omgiver, må være den samme uanset valg af referencesystem. Det er jo blot afstanden mellem ladningerne der ændres, når cylinderens størrelse ændres pga. længdeforkortningen.

I (5.5) anvendte jeg den meget intuitive sammenhæng, $Q = \delta l$. Ved anvendelse af, at Q er den samme i denne uanset valg af referenceramme samt (5.10) fås følgende udtryk for δ ved forskellige hastigheder:

$$\delta_0 = \frac{Q}{l_0} \wedge \delta = \frac{Q}{l} \implies \delta_0 l_0 = \delta l \iff \delta = \gamma \delta_0 \quad (5.11)$$

Når man bevæger sig i forhold til en af ladningerne, bliver tætheden af disse således større.

For et legeme, \mathcal{A} , der bevæger sig med samme hastighed som elektronerne i forhold til lederen, \mathcal{B} , vil afstanden imellem de positive atomer således være forkortet, og derudover vil man fra dette legeme iagttage en længere afstand imellem elektronerne, end når man er i hvile i forhold til lederen.

Tætheden af elektronerne i forhold til \mathcal{A} vil derfor ifølge (5.11) være givet ved

$$\delta_{\mathcal{A}-} = \frac{\delta_{\mathcal{B}-}}{\gamma} \quad (5.12)$$

Og tætheden af de positive atomer vil være givet ved

$$\delta_{\mathcal{A}+} = \gamma \delta_{\mathcal{B}+} \quad (5.13)$$

Jeg kender nu størrelserne af den positive og den negative ladningstæthed i forhold til \mathcal{A} . Den totale ladningstæthed i forhold til \mathcal{A} vil være givet ved:

$$\delta_{\mathcal{A}} = \delta_{\mathcal{A}+} + \delta_{\mathcal{A}-} \quad (5.14)$$

$$= \gamma \delta_{\mathcal{B}+} + \frac{\delta_{\mathcal{B}-}}{\gamma} \quad (5.15)$$

$$= \gamma \delta_{\mathcal{B}+} - \frac{\delta_{\mathcal{B}+}}{\gamma} \quad (\text{husk: } \delta_{\mathcal{B}-} = -\delta_{\mathcal{B}+} \text{ for } \delta_{\mathcal{B}} = 0) \quad (5.16)$$

$$= \delta_{\mathcal{B}+} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) \quad (5.17)$$

$$= \delta_{\mathcal{B}+} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \quad (5.18)$$

$$= \delta_{\mathcal{B}+} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (5.19)$$

$$= \delta_{\mathcal{B}+} \left(\frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (5.20)$$

Der gælder således, at $\delta_{\mathcal{A}} = \delta_{\mathcal{B}+} \gamma \frac{v^2}{c^2}$. Ud fra denne sammenhæng og (5.9) kan den elektriske feltstyrke i forhold til \mathcal{A} findes:

$$E_{\mathcal{A}} = \frac{\delta_{\mathcal{A}}}{2\pi\epsilon_0 r} = \gamma \frac{\delta_{\mathcal{B}+} v^2}{2\pi\epsilon_0 r c^2} \implies F_{\mathcal{A}} = \gamma q \frac{\delta_{\mathcal{B}+} v^2}{2\pi\epsilon_0 r c^2} \quad (5.21)$$

Ved multiplikation af ladningen, som \mathcal{A} har, har jeg fundet kraften i det ovenstående udtryk. Dette må også være den resulterende kraft, da der ikke er noget magnetisk felt i forhold til \mathcal{A} . \mathcal{A} bevæger sig jo med hastigheden, $\vec{0}$, i forhold til sig selv, hvilket ifølge (5.1) betyder, at der ikke er noget magnetisk felt i forhold til \mathcal{A} . Det skal understreges, at den hastighed, der ses i (5.21), selvfølgelig ikke er hastigheden af \mathcal{A} i forhold til sig selv, men derimod i forhold til \mathcal{B} .

Nu vil jeg betragte situationen set fra lederen, \mathcal{B} . Jeg har tidligere sat situationen op således, at \mathcal{A} og \mathcal{B} bevæger sig relativt til hinanden i x -aksens retning. Dermed må de være enige om målte længder, der er ortogonale med denne akse ifølge lorentztransformationen, (2.3).

Kraften på \mathcal{A} , som er vinkelret med de to inertialsystemers indbyrdes hastighed, vil være lig følgende i hver af de to inertialsystemer, hvis man antager, at massen er konstant:

$$F_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}} a_{\mathcal{A}} \quad \wedge \quad F_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{B}} a_{\mathcal{B}} \quad (5.22)$$

Det skal her bemærkes, at $m_{\mathcal{B}}$ er massen af \mathcal{A} set fra \mathcal{B} . Om disse gælder, at $m_{\mathcal{B}} = \gamma m_{\mathcal{A}}$, hvilket er et resultat af den relativistiske mekanik, som jeg i øvrigt ikke har omtalt i denne opgave.

Kraften på legemet må være konstant således, at vi har at gøre med en bevægelse med konstant acceleration. Når der er konstant acceleration gælder følgende:

$$\Delta y = \frac{1}{2} a_{\mathcal{A}} t_{\mathcal{A}}^2 = \frac{1}{2} a_{\mathcal{B}} t_{\mathcal{B}}^2 \quad (5.23)$$

Ved at anvende (5.22) i (5.23) fås følgende for kraften set fra \mathcal{B} :

$$\frac{1}{2} a_{\mathcal{A}} t_{\mathcal{A}}^2 = \frac{1}{2} a_{\mathcal{B}} t_{\mathcal{B}}^2 \quad \iff \quad (5.24)$$

$$\frac{F_{\mathcal{A}}}{m_{\mathcal{A}}} t_{\mathcal{A}}^2 = \frac{F_{\mathcal{B}}}{m_{\mathcal{B}}} t_{\mathcal{B}}^2 \quad \iff \quad (5.25)$$

$$F_{\mathcal{A}} \frac{m_{\mathcal{B}}}{m_{\mathcal{A}}} \left(\frac{t_{\mathcal{A}}}{t_{\mathcal{B}}} \right)^2 = F_{\mathcal{B}} \quad \iff \quad (5.26)$$

$$F_{\mathcal{A}} \gamma \frac{1}{\gamma^2} = F_{\mathcal{B}} \quad \iff \quad (5.27)$$

$$F_{\mathcal{B}} = \frac{F_{\mathcal{A}}}{\gamma} \quad (5.28)$$

Ved andendelse af (5.28) på (5.21) fås et udtryk for kraften på \mathcal{A} set fra \mathcal{B} :

$$F_{\mathcal{B}} = \gamma q \frac{\delta_{\mathcal{B}+} v^2}{2\pi\epsilon_0 r c^2} \frac{1}{\gamma} = q \frac{\delta_{\mathcal{B}+} v^2}{2\pi\epsilon_0 r c^2} \quad (5.29)$$

Ved at indføre $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$, $I = \delta_{B+} v$ og $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ fås sammenhængen,

$$F = qvB \quad (5.30)$$

hvilket netop er det samme som det tidligere opskrevne udtryk for den magnetiske feltstyrke.

5.4 Mit eget forsøg II

Jeg har netop vist, at det magnetiske felt kan transformeres over i et elektrisk felt ved at se situationen fra et inertialsystem i stedet for et andet. Den elektriske kraft og den magnetiske kraft repræsenterer således den samme vekselvirkning mellem felter og ladninger; om man iagttager et elektrisk fænomen eller et magnetisk fænomen afhænger derfor alene af det inertialsystem, som man iagttager fra.

Da jeg i mit forsøg målte på det magnetiske felt skyldtes fremkomsten af det magnetiske felt således bare, at jeg valgte at se situationen fra lederens inertialsystem. Hvis jeg havde fulgt med elektronerne rundt i kredsløbet, ville jo jeg ikke have målt noget magnetisk felt, men et elektrisk felt.

Det er yderst bemærkelsesværdigt, at den specielle relativitetsteori har indflydelse på så basale ting som sammenhængen mellem magnetisme og elektricitet. Når elektroner bevæger sig i en leder sker det ved almindelige strømstyrker med hastigheder på et par centimeter pr. sekund. Dette er bestemt under den grænse, hvor man normalt overvejer at regne relativistisk på fænomener. Der gælder, at $\gamma(1 \text{ cm/s}) \approx 1 + 0.556 \cdot 10^{-21}$,¹⁰ hvilket umiddelbart lyder meget småt og ligegyldigt, men alligevel er denne faktor selve hjørnестenen i elektromagnetismen i og med, at den gør det muligt at knytte elektriske og magnetiske felter sammen, som jeg har vist det.

Selvom γ er meget tæt på 1, må vi huske, at der er *mange* elektroner i omløb i et elektrisk kredsløb, hvilket selvfølgelig forstørrer den samlede effekt.

¹⁰Jeg har lavet denne udregning i Maple med 100 decimalers nøjagtighed. Når man laver sådanne relativistiske beregninger skal man være omhyggelig med, at ens computer/lommeregner kan regne med et passende antal decimaler situationen taget i betragtning.

6 Konklusion

I denne opgave har jeg først redegjort for Einsteins simple postulater, og derefter har jeg analyseret konsekvenserne af disse. Jeg er gået særligt meget i dybden med, hvilke konsekvenser lyshastighedens invarians har for opfattelsen af rummet og tiden.

Efter denne del af rapporten udførte jeg et forsøg om magnetisme, og jeg var senere i stand til at vise, hvordan eksperimentet kunne forklares ved anvendelse af relativistiske love.

En interessant ting omkring den specielle relativitetsteori er måden den opstod på. På baggrund af elektrodynamiske fænomener postulerede Einstein, at lysets hastighed var invariant. Herudfra måtte *hele* den klassiske fysik revurderes. Idéerne om absolut tid, absolutte længder og opfattelsen af rum og tid som to adskilte størrelser måtte bortkastes, såfremt Einstein postulater var sande. Såfremt Einsteins postulater var sande, måtte alle de konsekvenser, som jeg for eksempel eksempel har beskrevet i den teoretiske del af denne opgave, også være sande.

I den specielle relativitetsteori gør man som nævnt op med intuitive oplagte idéer som absolut tid og absolut længde. Om relativitetsteorien siger man ofte, at *alt er relativt*. Dette er helt forkert. Tværtimod er selve grundstenene i Einstein teorier størrelser, som *ikke* er relative. De vigtige invarianter i den specielle relativitetsteori, som jeg har beskrevet i denne opgave, er metrikken, Δs^2 , lysets hastighed, c , og kvadratet af egentiden, τ^2 , der er defineret, som forholdet mellem Δs^2 og c^2 . Den specielle relativitetsteori er således på ingen måde en teori, der er bygget op omkring relative størrelser, men derimod invariante størrelser. På den måde kan man sige, at navnet *invariansteori* egentlig ville passe meget bedre til Einstein teori end navnet relativitetsteori. Det var da også det første navn, som Einstein oprindeligt gav sin teori.

En af følgerne til den specielle relativitetsteori var, som mit forsøg beskrev det, måden man så på sammenhængen mellem elektricitet og magnetisme. Dette er et godt eksempel på, at speciel relativitetsteori ikke alene handler om, at se rummet og tiden ud fra et meget abstrakt synspunkt, men også om mange andre områder af fysikken.

A Invariante og konstante størrelser

I dette appendiks vil jeg beskrive, hvad en invariant og en konstant størrelse er, da dette er vigtigt at vide for at forstå denne fremstilling af den specielle relativitetsteori.¹¹

Invariant

En invariant størrelse i relativitetsteorien er defineret ved, at dens værdi er ens for alle iagttagere, uanset hvilket inertialsystem man iagttager fra.

Det vel nok mest oplagte eksempel på en relativistisk invariant, er lysets hastighed, som ifølge Einsteins andet postulat er ens i alle inertialsystemer.

Konstant

En konstant størrelse er karakteriseret ved, at den ikke ændrer sig med tiden. Et eksempel herpå kunne være hastigheden af en partikel. Set i forhold til partiklen selv er dens hastighed konstant 0, men set fra andre inertialsystemer i bevægelse i forhold til partiklens inertialsystem er hastigheden ikke 0, men stadig konstant. Vi har altså en situation, hvor der fra alle inertialsystemer iagttages forskellige værdier af partiklens hastighed, men ingen iagttager nogle ændringer i dens hastighed.

¹¹Alle grundelementerne fra dette afsnit er taget fra [MD] Appendiks A.

B Inertialsystemer

Om inertialsystemer

Et *inertialsystem* er et referencesystem, der ikke er under nogen acceleration, således at hastigheden er konstant. I et inertialsystem kan man fastlægge et koordinatsystem bestående af tre rumkoordinater, (x, y, z) , som et punkt til tiden, t . I inertialsystemer, der bevæger sig i forhold til hinanden, vil man iagttage forskellige koordinater for det samme punkt med mindre de betragtede inertialsystemer er sammenfaldende ved den pågældende tid. Desuden vil det samme punkt hele tid få nye koordinater i alle andre inertialsystemer end det, hvor punktet er i hvile.

Når man betragter to (eller flere) inertialsystemer er det praktisk, hvis koordinataksene til de inertialsystemerne peger i samme retning, samt at de er sammenfaldne til tiden, $t = t' = 0$. Man siger, at inertialsystemer, der opfylder dette, er i *standardkonfiguration*.

B.1 Om notation

Når man betragter to inertialsystemer, vælger man ofte at kalde dem for, \mathcal{S} og \mathcal{S}' . I de to inertialsystemer har en begivenhed¹² henholdsvis koordinaterne, (x, y, z) og (x', y', z') . At det ene inertialsystems koordinater har fået tilføjet “mærker” markerer, at dette inertialsystem er i bevægelse i forhold til det andet.

¹²Det er her underforstået, at det er i den klassiske mekanik.

C Rum og tid i den klassiske mekanik

I dette bilag vil opfattelsen af rum og tid i den klassiske fysik blive beskrevet. Jeg vil kort redegøre for galileitransformationen samt konsekvenserne af denne.

C.1 Galileitransformationen

Galileitransformationen bruges til at konvertere koordinatsættet for et punkt i et inertialsystem til koordinatsættet til det samme punkt i et andet inertialsystem. På figur 12 ses et eksempel, hvor et punkt, (x, y, z) , befinder sig i hvile i et inertialsystem, \mathcal{S} . Et andet inertialsystem, \mathcal{S}' , er i standardkonfiguration med \mathcal{S} og til tiden, t , kan punktets koordinater, (x', y', z') , i forhold til \mathcal{S}' findes ved anvendelse af Galileitransformationen, der er givet ved:

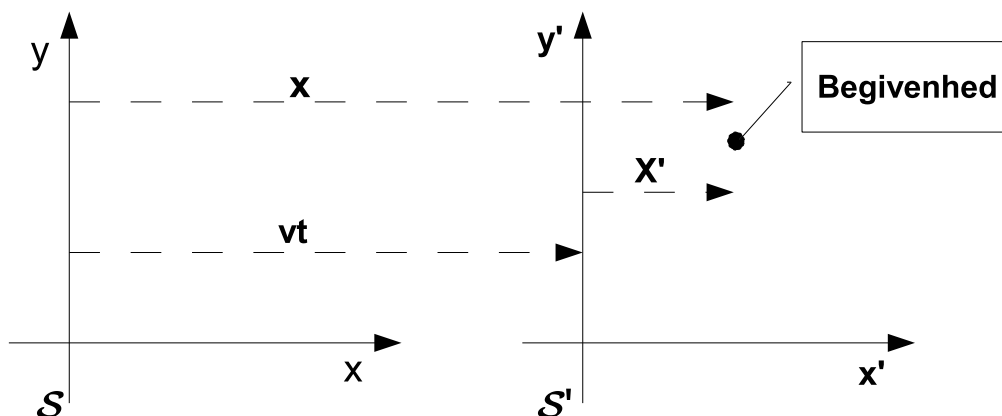
$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}\tag{C.1}$$

Intuitivt er der ikke noget overraskende i denne. En iagttager i \mathcal{S}' kan overtage tidskoordinaten, som iagttages fra \mathcal{S} og omvendt. I (C.1) er situationen den, at \mathcal{S} og \mathcal{S}' er sammenfaldende og deres indbyrdes bevægelse parallel med x -aksen. Dette gør, at de koordinaterne til de to akser, der er ortogonale på bevægelsesretningen, er ens i de to inertialsystemer. Sammenhængen mellem x og x' kan nemt udledes ved at kigge på figur 12.

C.2 Metrikken

I det tredimensionelle rum, som den Newtonske mekanik udfolder sig i, er afstanden mellem to punkter invariant. Afstanden mellem to punkter vil derfor være ens i alle inertialsystemer. Om afstanden Δr og forskellen i to begivenheders, (x, y, z) -koordinater, gælder:

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\tag{C.2}$$



Figur 12: På denne figur ses gallileitransformationen illustreret. De to inertialsystemer, \mathcal{S} og \mathcal{S}' , er anbragt i standardkonfiguration, således at $(y, z, t) = (y', z', t')$. Sammenhængen mellem x og x' er ifølge figuren givet ved $x' = x - vt$.

At Δr^2 er invariant betyder, at $\Delta r'^2 = \Delta r^2$. For at vise, at dette er tilfældet anvender jeg (C.1) på (C.2):

$$\Delta r'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 \quad (\text{C.3})$$

$$= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \quad (\text{C.4})$$

$$= ((x_2 - vt) - (x_1 - vt))^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (\text{C.5})$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (\text{C.6})$$

$$= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (\text{C.7})$$

$$= \Delta r^2 \quad (\text{C.8})$$

Det er således vist, at Δr^2 er invariant.

Betydning af invariansen af (C.2) er stor og kendetegner på alle måder geometrien af det sædvanlige tredimensionelle rum, som man betragtede universet for at være indtil man godtog Einsteins teorier.

C.3 Den klassiske opfattelse af rum og tid

Ved at betragte (C.2) ses det umiddelbart, at rum og tid er to fuldstændigt adskilte ting i den klassiske fysik. Dette er en direkte konsekvens af, at den invariante Δr^2 alene afhænger af rumlige forhold. Hvis ens bevægelse i rummet havde haft indflydelse på den tid, som man opfattede, ville forskellen i tidskoordinater være repræsenteret i (C.2). Det er den ikke, hvilket betyder, at tiden tikker med samme takt for alle iagttagere i alle inertialsystemer.

I den klassiske fysik er afstanden mellem to begivenheder således invariant, ligesom

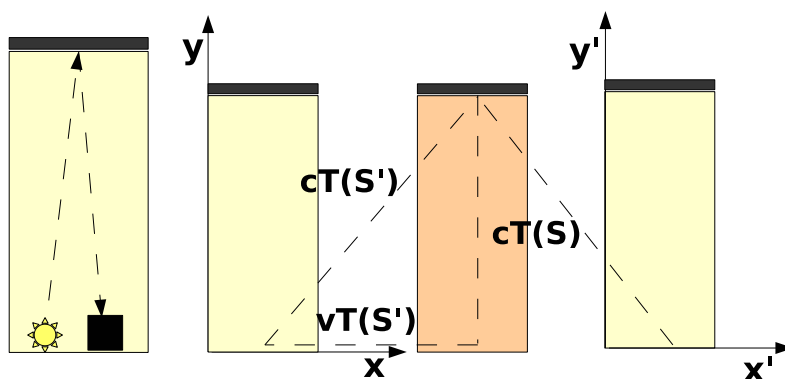
tiden mellem to begivenheder også er det, hvilket også helt klart stemmer overens med, hvad man oplever i hverdagen. Når man tager toget oplever man ikke, at ens ur taber eller vinder tid. Man oplever heller ikke, at afstanden mellem to vejpyle formindskes på grund af ens hastighed, når man bevæger sig relativt til dem ved for eksempel at køre i bil på motorvejen. Idéen om invariansen af tidsintervaller og længder stemmer således på alle måder overens med, hvad man oplever i hverdagen. Den klassiske opfattelse af, at rum og tid er totalt adskilte størrelser og dermed på ingen måde afhænger af hinanden, er således eksperimentielt meget velfunderet, og derfor var fysikkens verdensbillede også fuldstændigt domineret af dette indtil det tyvende århundrede.

D Udledning af Tidsforlængelsen og Længdeforkortningen

D.1 Feynmann uret

I dette appendix¹³ vil jeg ved hjælp af et tankeeksempel finde ud af, hvad der sker, når ure bevæger sig i forhold til en iagttager.

Jeg vil betragte to såkaldte *Feynmann-ure*, der er placeret i to forskellige inertialsystemer. Et Feynmann ur – som ses på figur 13 – består af en rektangulær kasse, hvori der i den ene ende er placeret en pære, som til en tid udsender et lyssignal, som reflekteres af et spejl i den anden ende, hvorefter det reflekterede lysglimt optages af en sensor i samme side som lyssignalet udsendtes i. Ved anvendelse af tidsintervallerne mellem de af sensoren opfangne lyssignaler kan man således bestemme, hvor hurtigt bevægede ure går i forhold til stationære ure.



Figur 13: Til venstre på denne figur ses et Feynmann-ur; I bunden er en pære samt en sensor, der kan opfange lyssignalet, når det er blevet reflekteret af spejlet modsat pæren.

På højredelen af figur 13 ses et inertialsystem, \mathcal{S} , som bevæger sig med hastigheden, v , i forhold til et andet inertialsystem, \mathcal{S}' . I \mathcal{S} vil man iagttage, at \mathcal{S}' bevæger sig stykket $vT_{\mathcal{S}'}$ i den tid det tager lyset at tilbagelægge vejen fra pæren til spejlet, som må være givet ved $cT_{\mathcal{S}}$. I \mathcal{S} vil man desuden iagttage at tiden, som det tager for lyset at tilbagebringe den samme vejlængde i \mathcal{S}' , er givet ved $cT_{\mathcal{S}'}$. Den retvinklede trekant, som ses på figur 13, fås følgende sammenhæng:

$$c^2T_{\mathcal{S}'}^2 = v^2T_{\mathcal{S}'}^2 + c^2T_{\mathcal{S}}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\text{D.1})$$

$$T_{\mathcal{S}'}^2(c^2 - v^2) = c^2T_{\mathcal{S}}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\text{D.2})$$

$$T_{\mathcal{S}'}^2 = \frac{c^2T_{\mathcal{S}}^2}{c^2 - v^2} \quad \Longleftrightarrow \quad (\text{D.3})$$

$$T_{\mathcal{S}'} = \frac{T_{\mathcal{S}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{D.4})$$

¹³Dette afsnit er baseret på [MD].

Ved indførelse T , som et tidsinterval i et bevæget ur, τ som intervallet i forhold til et ur, der er i hvile og $\gamma(v) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ fås

$$T = \gamma(v)\tau \quad (\text{D.5})$$

hvor τ kaldes egentiden.

D.2 Længdeforkortningen

Ud fra tidsforlængelsen kan længdeforkortningen findes. Ved at betragte et lyssignal, der udsendes langs første akse i to inertialsystemer i standardkonfiguration, findes følgende:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c \quad \wedge \quad \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = c \quad (\text{D.6})$$

Heraf følger umiddelbart,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \quad \iff \quad (\text{D.7})$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \Delta x \quad (\text{D.8})$$

Ved indsættelse af $\tau = \Delta t$, $\Delta x = L_0$, $\Delta t' = T$ og $\Delta x' = L$ fås udtrykket for længdeforkortningen:

$$L = \frac{T}{\tau} L_0 \quad \iff \quad (\text{D.9})$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma(v)} \quad (\text{D.10})$$

Undervejs har jeg udnyttet (D.5).

E Måleresultater

Her er en tabel med måleresultater samt udførte beregninger:

I	θ	$\tan \theta$	a	ϕ	$\tan \phi$	$1/a$
A	grader		m	grader		m^{-1}
0.10	1	0.01746	7	46	1.0360	14.29
0.43	10	0.1763	8	42	0.9004	12.50
1.05	15	0.2679	9	36	0.7265	11.11
2.49	29	0.5543	10	31	0.6009	10.00
2.08	26	0.4877	11	28	0.5317	9.091
2.91	35	0.7002	12	25	0.4663	8.333
2.70	34	0.6745	13	22	0.4040	7.692
3.67	41	0.8693	14	19	0.3443	7.143
4.60	46	1.0360	15	16	0.2867	6.667
5.05	50	1.1920	16	15	0.2679	6.250
6.04	54	1.3760	17	13	0.2309	5.882
6.38	56	1.4830	19	10	0.1763	5.263
1.87	25	0.4663	22	6	0.1051	4.545
			25	4	0.06993	4.000
			28	2	0.03492	3.571

Litteratur

[AE1] Albert Einstein:

Zur Elektrodynamik bewegter Körper,

1905. Kan hentes på:

http://www.pro-physik.de/Phy/pdfs/ger_890_921.pdf

[AE2] Albert Einstein:

Relativity: The Special and General Theory,

Methuen & Co Ltd, 1916.

Kan hentes på

<http://www.mit.edu/~birge/books/Einstein-Relativity.pdf>

[DH] David W. Hogg:

Special Relativity,

New York University, 1997.

Kan hentes på:

<http://cosmo.nyu.edu/hogg/sr/sr.pdf>

[EN] Finn Elvekjær & Børge Degn Nielsen:

Fysikkens Verden 3,

Gads forlag, 2. udgave, 1997.

[EN1] Finn Elvekjær & Børge Degn Nielsen:

Kraft og Bevægelse,

Gads forlag, 1983.

[MD] Mogens Dam:

Introduktion til den specielle relativitetsteori,

Niels Bohr Instituttet, 2004

Kan hentes på

<http://www.nbi.dk/~dam/fys12/sr10.pdf>

[SC] Sean M. Carroll:

A No-Nonsense Introduction to General Relativity,

Enrico Fermi Institute and Department of Physics, 2001.

Kan hentes på

<http://pancake.uchicago.edu/~carroll/notes/grtinypdf.pdf>

[TW] Edwin F. Taylor & John Archibald Wheeler:

Spacetime Physics,

W.H. Freeman and Company, 1991.